





K-8⁰
MK —————
87-B

5 а. с. х. е. н

1-й с. х. .

Conobach N 801

КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ
ТОМЪ IV.
АЛГЕБРА.

W. P. C. P.

M. A. T. H. N.

T. O. M. B.

A. L. E. B. A.

ТЕОРЕТИЧЕСКАГО
И
ПРАКТИЧЕСКАГО
КУРСА

ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ
ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ,

содержащая въ себѣ полную и сокращенную
Алгебру съ вышними степенями, и съ присо-
вокупленіемъ разныхъ Геометриче-
скихъ задачъ

въ пользу и употребленіе
ЮНОШЕСТВА

и упражняющихся въ Математику,
СОЧИНЕННАЯ

Артиллеріи Штыкъ-Юнкеромъ и партикулярнымъ въ Мо-
сквѣ благороднаго юношества Учителемъ Математики

Ефимомъ Войтяховскимъ.

Съ 5 ю чертежами.

Съ Указнаго Дозволенія.

ВЪ МОСКВѢ,

Печатана издѣвіемъ сочинителя въ воль-
ной типографіи Хр. Клаудія

1790 года.

Гр. А. Клер. Фрз. Селитин

THEORETICAL

AND

APPLIED

MATHS

BY

W. L. BAKER

OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

BERKELEY, CALIF.

1901

NEW YORK

THE MACMILLAN COMPANY

1901

PRINTED BY THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

BERKELEY, CALIF.

1901

THE MACMILLAN COMPANY

NEW YORK

1901

THE MACMILLAN COMPANY

NEW YORK

1901

THE MACMILLAN COMPANY

NEW YORK

1901

THE MACMILLAN COMPANY

NEW YORK

1901

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Благосклонный Чипапель! кажется, нѣтъ сред-
ства вымыслить предлагаемой здѣсь наукѣ дру-
гаго уподобленія, какое ей приписалъ Г. Про-
фессоръ Румовскій говоря: „произхожденіе Ал-
„гебры не можно лучше представить, какъ
„ежели Арифметику и Геометрію сравнить съ
„двумя рѣками, изъ коихъ каждая, сначала
„имѣя особенное теченіе, напоследокъ соеди-
„нившись составили одну, пространствомъ,
„спрежмениемъ и глубиною несравнено прежнихъ
„превосходящую. Никакая изъ Математиче-
скихъ наукъ не приноситъ столько чести ра-
зуму человеческому, какъ Алгебра; поелику
мы ясно видимъ, что Механика, Астрономія и
всѣ части смѣшанной Математики совершен-
ствомъ обязаны сей наукѣ. Не удивляетъ ли
насъ то, когда Звѣздочетъ посредствомъ Ал-
гебры изчисляетъ и опредѣляетъ намъ точное
время движенія, путь, скорости, противосто-
яніе и обращеніе около своихъ средоточій планъ
небесныхъ? и не предполагаетъ ли намъ тѣхъ са-
мыхъ минувъ время, въ которое имѣетъ быть
Солнечное или Лунное затмѣніе? Мы чрезъ пра-
вила сей науки изслѣдываемъ многія важныя
Математическія истины, и открываемъ новыя
изъ нихъ заключенія, безъ которой бы трудъ
нашъ оставался тщетнымъ.

Алгебра не столь многотрудная наука, какъ
то нѣкоторыя заключаютъ, если только пра-
вила оной учащемуся ясно изъяснены будутъ.

Разсматривая понятія и стремленія учащихся, удобно можно оную преподавать по окончаніи чепырехъ Ариѣметическихъ правилъ десятичныхъ дробей, не входя въ правила степеней и извлеченія корней, что безъ сомнѣнія послужитъ имъ легчайшимъ руководствомъ въ изслѣдываніи истиннѣ Геометрическихъ и прочихъ частей Математики предложеній; по сей-то причинѣ старался я оную разположить такъ, дабы учащіеся удобно могли почпи въ самыхъ еще началахъ оной разрѣшать любопытства достойные вопросы самыми простыми и удобопонятнѣйшими правилами, не подвергаясь многотруднымъ Ариѣметическимъ размышленіямъ, и пѣмъ самимъ пріохопить ихъ къ сей важной части Математики.

Ежели я ошибаюсь въ моихъ мнѣніяхъ, то вы, благосклонный читатель, можете веспи учащихся правиламъ сей науки по собственному вашему благоразумію; и для того я ища вашего ко мнѣ снисхожденія, покорнѣйше прошу недоспадки оной, равно и находящіяся въ ней мои и типографическія погрѣшности, коихъ мнѣ время, отвлекающее повсядневно къ должности преподаванія Юношеству слабыхъ моихъ знаній, не дозволило основательнѣе высмотрѣть, вашимъ изобильнымъ знаніемъ исправить, чѣмъ вы чувствительнѣе одолжите пребывающаго вамъ съ истиннымъ почипаніемъ, съ каковымъ и есмь.

Вашъ Милостиваго Государя
нижайшій слуга *Ефимъ Войтяховской.*

О Г Л А В Л Е Н І Е А Л Г Е Б Р Ы .

Страницы.

О Алгебрѣ вообще и о разныхъ родахъ исчисленія простыхъ и сложныхъ количествъ	-	1.
О сложеніи Алгебраическихъ величинъ	-	6.
— Вычитаніи Алгебраическихъ величинъ	-	8.
— Умноженіи Алгебраическихъ величинъ	-	11.
— Дѣленіи Алгебраическихъ величинъ	-	16.
— Дробяхъ или ломаныхъ числахъ	-	24.
— Сложеніи Алгебраическихъ дробей	-	28.
— Вычитаніи Алгебраическихъ дробей	-	30.
— Умноженіи дробей цѣлымъ количествомъ	-	32.
— Дѣленіи дробей на цѣлыя количества	-	33.
— Умноженіи дроби дробью	-	35.
— Дѣленіи дроби чрезъ дробь	-	37.
— Разрѣшеніи дробей на безконечные ряды	-	40.
— Различныхъ изображеніяхъ величинъ съ оприцательными показателями	-	48.
— Изображеніи степеней простыхъ и сложныхъ количествъ	-	49.
— Нахожденіи или извлеченіи корней изъ простыхъ и сложныхъ количествъ	-	67.
— Изображеніи корней изъ несовершенныхъ степеней безконечнымъ рядомъ, приближаясь къ истинному корню	-	90.
— Разныхъ исчисленіяхъ неизвлекаемыхъ величинъ	-	97.
— Сложеніи коренныхъ величинъ	-	100.
— Вычитаніи коренныхъ величинъ	-	101.
— Умноженіи коренныхъ величинъ	-	103.
— Дѣленіи коренныхъ величинъ	-	107.
— Уравненіяхъ первой степени и о различныхъ рѣшеніяхъ сей степени вопросовъ	-	112.
		О Двухъ

VIII О г л а в л е н і е

О Двухъ и больше уравненіяхъ первой степени	133.
— Уравненіяхъ второй степени	168.
— Смѣшанныхъ второй степени уравненіяхъ	171.
— Рѣшеніи чистыхъ уравненій всѣхъ степеней	192.
— Содержаніяхъ и пропорціяхъ вообще	194.
— Прогрессіи Ариѳметической	199.
— Пропорціи Геометрической	208.
— Прогрессіи Геометрической	220.
— Различныхъ примѣрахъ пропорціи и прогрессіи Геометрической	230.
— Алогариѳмахъ	265.
— Рѣшеніи непостоянныхъ и неопредѣленныхъ вопросовъ	289.
— Строкахъ или порядкахъ полигонныхъ (угольныхъ) и фигурныхъ чиселъ	326.
— Уравненіяхъ вышнихъ степеней	341.
— Различныхъ примѣрахъ третьей степени	355.
— Разрѣшеніи вопросовъ посредствомъ общаго кубическаго правила	370.
— Рѣшеніи уравненій четвертой степени	375.
— Приведеніи уравненій четвертой степени въ уравненія третьей степени	381.
— Разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе	389.
— Приведеніи уравненій вышнихъ степеней въ нижнія	392.
— Предложеніяхъ Геометрическихъ	405.
— Задачахъ, пребывающихъ рѣшенія	433.



О

Алгебрѣ вообще и о разныхъ родахъ исчисленія простыхъ и сло- жныхъ количествъ.

§ 1. *Опредѣленіе.* Алгебра или общая Ари-
метика есть наука, по извѣстнымъ величи-
намъ, изображая ихъ азбучными буквами, сыски-
вать неизвѣстныя количества.

§ 2. *Положеніе.* Всякая буква означать мо-
жетъ всѣ возможные числа, на примѣрѣ: бу-
ква *d* можетъ значить 5, 12, 174 и прочая;
также принимается и вмѣсто $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$ и проч.

§ 3. *Примѣчаніе.* Въ Алгебрѣ знаки правилъ
употребляются такіежъ, какіе и въ Арифмети-
кѣ, какъ-то: $+$ есть знакъ сложенія, и выго-
варивается *плюсъ* или *черезъ съ*. Знакъ вы-
читанія есть $-$, и выговаривается *минусъ* или
безъ. Знакъ умноженія есть \times , или *почка* (\cdot).
Знакъ дѣленія есть слѣдующій ($:$). Знакъ
равенства есть $=$ и проч.

§ 4. *Опредѣленіе.* Величина, имѣющая предъ
собою знакъ $+$, называется *положительная* или
сущестующая; а величина, предъ которою на-
ходится

ходился знакъ —, именуется отрицательная или мысленная.

Примѣчан. Отрадательная величина хотя не есть положительная, однакожъ мысленно положительною прѣсмлющаяся, на примѣръ: наличныя деньги, будутъ количественно положительное, или существующее; а долги суть количества отрицательныя, или инимыя. И такъ ежели положимъ, что я имѣю 1000 рублей и припомъ 300 рублей долженъ; то будутъ количество моихъ денегъ, 1000 рублей — 300 рубл. $= + 700$ рубл. Въ разсужденіи сего надлежитъ примѣчать, дабы не принимать отрицательнаго количества положительнымъ, то есть, долги слѣдуетъ означать чрезъ — 300, а наличныя деньги чрезъ + 300. Изъ сего видно, что отрицательное количество меньше, нежели 0 или ничего; ибо представъ себѣ, что кто нибудь имѣетъ у себя 300 рубл. и шакоежъ число долженъ, то количество его имѣнія будетъ 0 или ничего, то-есть $300 - 300 = 0$; но еспли онъ, не имѣвши у себя ничего, 300 рубл. долженъ, то количество его богатства $0 - 300 = - 300$ будетъ меньше нуля, или меньше, нежели ничего.

§ 5. Положен. Всякая величина, не имѣющая предъ собою знака +, разумѣется положительною, на примѣръ: $a = +a$, или $7 = +7$; отрицательнаяжъ величина должна имѣть предъ собою всегда знакъ —.

§ 6. Положен. Въ произведеніи нѣсколькихъ количествъ буквы пишутся нераздѣльно, на прим. $a \times b = a.b = ab$; или $a \times b \times c \times d$ пишется $abcd$. Ежели количество a умножится чрезъ a , то произведение пишется aa или a^2 ; также $a \times a \times a$ пишется aaa или a^3 ; а вмѣсто $a \times a \times a \times a \times a$ пишется $aaaaa$ или a^5 , на прим. положимъ, что $a = 3$, то будетъ $aaa = a^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Число 2, 3 и 5, въ верху буквы написанное, показываетъ сколько разъ буква a , для умноженія поставляется, и называется по-

каза-

казатель. Количество a^2 , выговаривается a второй степени; a^3 зовется a третьей степени, и такъ далѣе.

Примѣч. У величины, просто написанной, на прим. b , разумѣнь должно показателемъ 1 иу, по-есть $b = b^1$.

§ 7. Положен. Ежели какая нибудь буква, изображающая величину, берется нѣсколько разъ, на примѣръ: ежели буква b возьмется 5 разъ, то число 5 пишется предъ буквою b такимъ образомъ $5b$; а когда берется 2 раза, то пишется $2b$ и проч. Число 5 также и 2 называется предстоящимъ количества b .

Примѣч. У величины, просто написанной, на прим. a или cd , за предстоящее мысленно принимается единица, какъ то $a = 1.a$, $cd = 1.cd$ и проч.

§ 8. Опредѣл. Простыя величины суть тѣ, кои не соединены съ другими количествами знакомъ $+$ или $-$, какъ на прим. a , $-bd$, $2abc^2$ и проч.

§ 9. Опредѣлен. Сложныя величины суть тѣ, кои имѣютъ нѣсколько величинъ, соединенныхъ знаками $+$ или $-$, какъ-то: $2b + ac$, $a + b - 3d$ или $ab + c^2d - 3bc$ и проч.

Прибавлен. Иногда сложныя величины раздѣляются на двоесложныя, троесложныя и проч. какъ-то: двѣ величины, соединенныя знакомъ $+$ или $-$, на прим. $a + d$, или $2a - 3ed$ именуящся двоесложными. Когда при количества соединены какими нибудь знаками, на прим. $a + 2d - 3ab$; тогда оныя количества называются прое-
А 2
ными.

ными. Четырех - сложными количесвами именуются тѣ величины, у коихъ четыре количесва совокуплены помянутыми знаками, и вообще многосложными зовутся всѣ тѣ величины, у которыхъ нѣсколько количесвъ соединены знаками $+$ или $-$.

§ 10. *Опредѣл.* Каждая величина изъ составляющихъ сложное количесво, именуется *членомъ* или *частію* онаго, на примѣръ: количесва $a + 2d - 3ab$, величина a , $2d$ и $- 3ab$ суть члены или части сложнаго количесва.

§ 11. *Опредѣл.* Подобныя или одинакія Алгебраическія величины суть тѣ, кои означающіяся одинаковыми буквами, имѣющими равныхъ показателей, какъ-то: $3a$ и $2a$, или $5a^2$ и $2a^2$, также $3ad$ и $4ad$, суть количесва подобныя; но $3a$ и $2a^2$, будутъ количесва неподобныя, потому что $2a^2 = 2aa$ означаетъ произведение количесва a чрезъ a , дважды взятое; а $3a$ есть количесво простое a , прижды взятое.

§ 12. *Задача.* Данную сложную величину $5a^2 + 2bc - 2c^2b + b^3$ изобразить числами.

Рѣшен. Положимъ, что вмѣсто буквъ написуются числа, на примѣръ: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, то будетъ $5a^2 = 5.3.3 = 45$, $2bc = 2.4.5 = 40$, $- 2c^2b = - 2.5.5.4 = - 200$, $b^3 = 4.4.4 = 64$; и такъ $5a^2 + 2bc - 2c^2b + b^3 = 5.3.3 + 2.4.5 - 2.5.5.4 + 4.4.4 = 45 + 40 - 200 + 64 = - 51$.

§ 13. *Задача.* Данную сложную величину, имѣющую подобныя количесва, представить въ меньшемъ числѣ членовъ.

Рѣшен.

Рѣшен. I. Ежели подобныя количества будутъ имѣть одинакіе знаки, то предстоящія сложа, сумму ихъ напиши предъ поюже буквою; а еспѣли знаки оныхъ разные, то вычтя меньшее предстоящее изъ большаго, предъ оспашкомъ напиши знакъ большаго количества, получишь пребуемую величину въ меньшемъ числѣ членовъ, *на примѣръ:* въ сложной величинѣ $2a + d + 5a$, члены $2a$ и $5a$ суть подобныя; и такъ сложа предстоящее 2 съ 5 ю, сумму ихъ 7 напиши предъ буквою a , будетъ $7a$; чрезъ что сложное количество $2a + 2d + 5a$, представится въ меньшемъ числѣ членовъ $7a + 2d$.

Также сократится и количество $a + d + 2a$: сложа предстоящія 2 съ 1 количества a , будетъ $3a + d = a + d + 2a$.

2. Ежели сложное количество будетъ $2a + d - 7a$, то вычтя предстоящее 2 изъ 7, предъ оспашкомъ 5 поставь знакъ большаго количества, получишь сокращенную величину $d - 5a = 2a + d - 7a$.

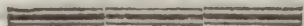
3. Когда подобныя количества съ разными знаками будутъ имѣть равныхъ предстоящихъ, то такія количества уничтожаются, *на примѣръ:* $2a + d - 2a$, будетъ $= d$; также ежели будетъ нѣсколько подобныхъ количествъ положительныхъ и отрицательныхъ, то сложа предстоящія положительныхъ величинъ особливо, также и предстоящія отрицательныхъ величинъ особливо, вычти меньшее число изъ большаго, а предъ оспашкомъ поставь знакъ большаго количества; будешь имѣть величину, въ меньшемъ числѣ членовъ представленную, *на примѣръ:*

чтобѣ сократитъ сложную величину $3a + d - 2a - 3d + 7a$, то изъ суммы предстоящихъ положишельнаго количества a , то есть изъ 10, вычти предстоящее 2 отрицашельной величины $-2a$; также и предстоящее 1 количества d , изъ предстоящаго 3 величины $-3d$, чрезъ что данное количество $3a + d - 2a - 3d + 7a$ сократится въ $8a - 2d$.

Подобнымъ образомъ сокращаются и слѣдующія величины :

$$10b - 3a - 8b + 4a - 2b - a = 0$$

$$4a^2b + 5ac - 9a^2b + 3ac - 2a^2b \text{ будетъ} = 8ac \\ + 4a^2b - 11a^2b = 8ac - 7a^2b.$$



О сложѣніи Алгебраическихъ величинъ.

§ 14 Задача. Данныя Алгебраическія простыя величины сложишь.

Рѣшен. I. Если данныя величины будутъ одинакія, и припомъ положишельныя; то сложи ихъ предстоящія, напиши сумму предъ тою же буквою, получишь требуемую сумму, на примѣръ: сложишь $5b, b, 3b$ и $4b$. Сумма предстоящихъ будетъ $5 + 1 + 3 + 4 = 13$, которое написавши предъ буквою b , сумма будетъ $5b + b + 3b + 4b = 13b$.

2. Еслилижъ въ данномъ количествѣ одинакія величины будутъ положишельныя и отрицапельныя, то совокупя ихъ подлежащими знаками, сдѣлай сокращеніе (§ 13), получишь искомую сумму, на примѣръ: сложишь $2a, 5a$, и $-4a$, будетъ сумма ихъ $2a + 5a - 4a = 3a$. Также и
сумма

сумма величинъ c , $4c$ и $-7c$, будетъ $c + 4c - 7c = -2c$.

3. Когда разныя величины будутъ положи-
тельные, то совокупя ихъ знакомъ $+$, будетъ
имѣть желанную сумму, на примѣръ: сложивъ
 $2a$, $3b^2$, $2bc$, $5de$, сумма будетъ $2a + 3b^2$
 $+ 2bc + 5de$. Еслилижъ разныя величины, бу-
дутъ положишельныя и отрицательныя, то со-
едини ихъ подлежащими знаками, будетъ имѣть
требуемую сумму, на прим. $7b$ сложивъ съ
 $-3a^2$, сумма будетъ $7b - 3a^2$; также сумма
количествъ $3b$, $-2bc$, $3a$ и $-4ad^2$ будетъ
 $= 3b - 2bc + 3a - 4ad^2$.

§ 15. Задача. Найди сумму сложныхъ ко-
личествъ.

Рѣшен. Если въ данныхъ величинахъ бу-
дутъ одинакія количества; то написавши ихъ
одну подъ другую, сдѣлай сложеніе, какъ въ
предъидущей задачѣ показано; а прочія, не имѣ-
ющія подобныхъ себѣ величинъ, соедини съ дан-
ными величинами подлежащими ихъ знаками,
получишь требуемую сумму, какъ изъ слѣдую-
щихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{r} 4a^2 + 2b \\ - 3a^2 - 5b \\ 2a^2 - 3b \\ \hline 3a^2 - 6b = \text{сум.} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} 5ab + 2ac - 3a^2 - n \\ 4ab - 5ac + 4a^2 - 1 \\ - 2ab + ac - 5a^2 + 2n \\ \hline 7ab - 2ac - 4a^2 + n - 1 = \text{сум.} \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r}
 4a^2bc + 5abc - 7b^2 + 3d^2 \\
 3a^2bc - 3abc + 3b^2 + 1 - n \\
 - 2a^2bc - abc + b^2 + d^2 \\
 3a^2bc - 7abc + 5b^2 - 4d^2 + m^2 \\
 \hline
 8a^2bc - 6abc + 2b^2 + 1 - n + m^2 = \text{сум. кол.}
 \end{array}$$

О вычитаніи Алгебраическихъ величинъ.

§ 16. Задача. Данную простую величину, вычестъ изъ другой.

Рѣшен. I. Ежели положительныя величины будущъ не одинакія, то слѣдуетъ только вычисляемое количество приписать къ другому данному съ знакомъ —, на примѣр.: изъ $3d$ вычестъ $2a$, разность будетъ $3d - 2a$. Также когда изъ $5a^2$ вычестъ должно $4a$, то разность будетъ $5a^2 - 4a$.

2. Еспѣли данныя величины будущъ одинакія, то соединя вычисляемое количество съ тѣмъ, изъ котораго вычестъ должно, знакомъ —, сдѣлай сокращеніе, будетъ пребуемая разность, на прим. изъ $5b$ вычестъ $3b$, разность будетъ $5b - 3b = 2b$. Еспѣлижъ изъ $+ 3a$ вычестся $+ 7a$, то разность будетъ $3a - 7a = - 4a$.

Примѣч. Изъ сего видно, что разность Алгебраическихъ величинъ пишется также, какъ и разность чиселъ, наприм. изъ 12 вычестъ 5, разность будетъ $12 - 5 = 7$; также и $3 - 7 = - 4$ (Том. I. § 47.).

§ 17. Задача. Сложную величину съ разными знаками вычестъ изъ данной.

Рѣшеніе

Рѣшен. Перемѣня въ вычитаемомъ количествѣ всѣ знаки въ прошивные, то есть $+$ въ $-$, а $-$ въ $+$, соедини ихъ съ данною величиною; потомъ, ежели можно, сдѣлай сокращеніе, будешь имѣть искомую разность, на прим. изъ величины c вычешь количество $a - b$, искомая разность будетъ $= c - a + b$.

Доказател. Ибо вычтя изъ количества c сперва одно количество a , разность будетъ $c - a$; но какъ слѣдовало вычсть изъ онаго не цѣлое количество a , но a безъ b : посему изъ величины c вычтено больше должнаго количествомъ b ; по сей причинѣ къ остатку $c - a$ надлежало придать количество b ; слѣдовательно искомая разность $= c - a + b$.

Прибавлен. Дабы показанное вычитаніе удобнѣе разумѣть можно было, то представь себѣ, что изъ 12 вычсть должно $7 - 2$, то-есть 5, разность будетъ $12 - 7 + 2 = 7$; ибо ежели написать $12 - 7$, то сіе будетъ значить, что изъ 12 вычтено 2 мя больше должнаго; поелику слѣдовало вычсть не цѣлое 7, но $7 - 2$, то-есть 5; по сей причинѣ къ числу $12 - 7$, надлежитъ придать 2, будетъ пребуемая разность $= 12 - 7 + 2 = 7$.

Слѣдствіе. Изъ сего явствуетъ, ежели должно будетъ изъ положительной величины вычсть отрицательную; то перемѣня въ вычитаемомъ количествѣ знакъ $-$ въ $+$, припиши оную съ симъ знакомъ къ тому количеству, изъ котораго вычитать должно было, получишь иско-

мую разность, на примѣръ: изъ $+5b$ вычешъ $-3b$, разность будетъ $5b + 3b = 8b$.

Примѣч. Изъ двухъ предъидущихъ задачъ и слѣдствія удобно можно видѣть, что при вычитаніи подобныхъ положительныхъ или отрицательныхъ величинъ, то есть съ одинаковыми знаками, предстоящее одно изъ другого вычитается и предъоснапкомъ спавится знакъ большаго количества (представя себѣ знакъ вычитаемаго количества прошивнымъ); а предстоящія одинакихъ величинъ съ разными знаками, одно съ другимъ складывается, и предъ суммою ихъ пишется знакъ того количества, изъ котораго должно было сдѣлать вычитаніе, на примѣръ: изъ $5a + 2b$, вычешъ $2a - 4b$, разность по предложенной задачѣ будетъ $5a + 2b - 2a + 4b = 3a + 6b$; гдѣ изъ $+5a$ вычтено $+2a$, осталось $+3a$; но $+2b$ и $-4b$ по перемѣнѣ знака сложены, коихъ сумма $= 6b$; что и числами повѣрить можно, на примѣр. пусть $a = 20$, $b = 3$, то будетъ $5a + 2b = 5.20 + 2.3 = 100 + 6 = 106$, также и $2a - 4b = 2.20 - 4.3 = 40 - 12 = 28$, которое вычтя изъ 106, разность будетъ $106 - 28 = 78$; пожѣ самое число содержитъ въ себѣ и разность $3a + 6b$; ибо $3a + 6b = 3.20 + 6.3 = 60 + 18 = 78$.

§ 18. **Задача.** Изъ сложной величины вычешъ другую сложную.

Рѣшен. Подписавши вычитаемое количество подъ другое данное, представъ себѣ мысленно, что знаки вычитаемаго количества перемѣнены въ прошивные; потомъ сдѣлай вычитаніе, какъ въ предъ-

О умноженіи Алгебраическихъ величинъ. 11
 предѣидущихъ задачахъ и примѣчаніи показано ,
 на примѣръ:

$$\begin{array}{r} \text{изъ } 2ab + 3d - 2n \\ \text{вычешъ } ab + 5d + 3n \\ \hline \text{разность будетъ } = ab - 2d - 5n \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} \text{изъ } 5ab + 4cd - a^2 + 2ed \\ \text{вычешъ } 7ab + 3cd - 3a^2 + 2ed \\ \hline \text{разность } = 12ab + cd + 2a^2 \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r} \text{Изъ } 8a^2 - 9ab + 2ab^2 - 9b^3 - c^3 + a - p \\ \text{вычешъ } 6a^2 - 3ab - 2ab^2 - 3b^3 - c^3 - n - 1 + m \\ \hline \text{разность } = 2a^2 - 6ab + 4ab^2 - 6b^3 + a - p + n + 1 - m. \end{array}$$

О умноженіи Алгебраическихъ величинъ.

§ 19. Задача. Умножишь данную Алгебраическую величину чрезъ другую.

Рѣшен. I. Ежели какое нибудь количество, буквою изображенное, должно будетъ увеличить въ нѣсколько разъ; то слѣдуетъ только предшоящее множимаго количества умножить даннымъ числомъ, и произведеніе ихъ написать предъ множимой буквою, на примѣръ: $b \times 3 = 3 \cdot b = 3b$. Также и $2ad \times 4 = 4 \cdot 2ad = 8ad$.

2. Опъ умноженія количества a чрезъ b произведеніе будетъ (какъ о семъ уже прежде говорено) $a \times b = ab$.

3. Ежели должно будетъ $2a$ умножить чрезъ d , то произведеніе пишется $2ad$; ибо произведеніе a чрезъ d будетъ $= ad$; но какъ множимое

мо количество a , есть дважды взятое, то и произведение ad должно быть дважды взятое, то-есть $2a \times d = 2ad$; но ежели множитель d будетъ впрое больше, то и произведение будетъ впрое больше $2ad$, то есть $2a \times 3d = 6ad$. Изъ сего видно, что въ умноженіи Алгебраическихъ величинъ предстоящія одно другимъ умножаются, по правилу умноженія простыхъ чиселъ.

4. Ежели умножись a чрезъ a^2 , то произведение будетъ a^3 ; ибо $a = a^1$ (§ 6 примѣч.), $a^2 = aa$; по сему $a^1 \times a^2 = a \times aa = aaa = a^3$ (§ 6), гдѣ показатель 3 равенъ суммѣ показателей множимаго 1 и множителя 2. Также $b^2 \times b^3 = b^5$; ибо $b^2 = bb$, $b^3 = bbb$, по сему $b^2 \times b^3 = bb \times bbb = bbbbb = b^5$ (§ 6). Изъ сего явствуетъ, что при умноженіи одинакихъ буквъ, показатели множимыхъ количествъ складываются, коихъ сумма, написанная надъ тою же буквою, означаетъ требуемое произведение, какъ-то: $a^7 \times a^5 = a^{7+5} = a^{12}$. Также $2d^3 \times 5d^5 = 10d^{3+5} = 10d^8$.

§ 20. Теорема. Въ произведеніи двухъ какихъ нибудь величинъ съ одинаковыми знаками будетъ знакъ $+$; а при умноженіи величинъ съ разными знаками въ произведеніи будетъ $-$: то-есть $++$ или $-- = +$, а $+-$ или $-+ = -$.

Доказат. Положимъ, что должно умножить количество $a - b$, чрезъ $c - d$. Умножь сперва количество a чрезъ c (ибо умноженіе Алгебраическихъ

ческихъ величинъ начинается съ лѣвой руки на право) произведеніе будетъ ac ; но какъ должно умножить чрезъ c , не цѣ-
 лое количесство a , но a безъ b ; по сей причинѣ произведеніе ac будетъ

$$\begin{array}{r} a-b \\ c-d \\ \hline ac-bc-ad+bd \end{array}$$

больше подлиннаго отрицательнымъ количествомъ b , столько разъ взятымъ, сколько величина c въ себѣ единицъ имѣетъ ; того ради умножа количество b чрезъ c , припиши произведеніе bc къ первому произведенію ac съ знакомъ $-$, будетъ подлинное произведеніе количества $a-b$, только чрезъ одно c , $= ac - bc$, которое будетъ больше пребуемаго величиною $a-b$, столько разъ взятою, сколько количество d въ себѣ единицъ имѣетъ ; поелику должно было умножить количество $a-b$ не на цѣлое количесство c , но на $c-d$; по сей причинѣ произведеніе $(a-b).d = ad - bd$, слѣдуетъ вычестъ изъ перваго произведенія $ac - bc$, остатокъ будетъ $ac - bc - ad + bd$ подлинное произведеніе (ибо въ вычисаніи, знаки перемѣняющіяся въ прописныя § 17.) ; слѣдовательно $+ \times +$ или $- \times - = +$, а $+ \times -$ или $- \times + = -$. Ч. д. н.

Тожъ самое можно доказать и числами, на примѣрѣ: положимъ множимое $7-3$, а множитель $5-2$. И такъ умножь сперва 7 чрезъ 5 произведеніе будетъ $7-3$
 35 , но какъ слѣдовало $5-2$
 умноживъ не цѣлое 7 $35-15=20$
 чрезъ 5 , но 7 безъ 3 , $-14+6=-8$
 то есть 4 ; того ради умножа 3 чрезъ 5 , $35-29+6=20-8=12$

про-

произведеіе 15 припиши къ числу 35 съ знакомъ —, будетъ подлинное произведеіе $35 - 15 = 20$, которое больше пребуемаго произведеія величиною $7 - 3 = 4$, дважды взяпою; поелику должно было умножитъ количество $7 - 3$ не на цѣлое число 5, но на 5 безъ 2хъ, то есть чрезъ 3; по сей причинѣ, умножа количество $7 - 3 = 4$ чрезъ 2, произведеіе $14 - 6 = 8$ вычпи изъ произведеія $35 - 15 = 20$, разность будетъ $35 - 15 - 14 + 6 = 20 - 8 = 12 = 4 \times 3$ подлинное произведеіе.

Слѣдствіе. Изъ сего удобно можно видѣть, что опъ умноженія величинъ съ одинаковыми знаками произведеіе будетъ положительное; а опъ умноженія величинъ съ разными знаками произведеіе будетъ отрицательное, на примѣръ:

$$+ 3a^2 \times + 2a^2 = + 6a^4.$$

$$\text{также } - 7ab^3 \times - 3a^2b = + 21a^3b^4;$$

$$\text{но } + ab \times - ac = - a^2bc;$$

$$\text{также } - 2ad \times + d = - 2ad^2.$$

§ 21. **Задача.** Умножитъ количество $3a^2x + 2p$ чрезъ $a - 2x$.

Рѣшен. Написавши множителя подъ множимое количество, умножь первой членъ $3a^2x$ множимаго, первымъ членомъ a множителя,

$$\begin{array}{r} 3a^2x + 2p \\ a - 2x \\ \hline 3a^3x + 2ap - 6a^2x^2 - 4px. \end{array}$$

припиши подъ черпою; потомъ умножь второй членъ $2p$ множимаго, тѣмъ же количествомъ множителя, произведеіе $+ 2ap$ припиши къ первому; напоследокъ умножь

такимъ

такимъ же образомъ первой и второй членъ множимаго, вторымъ членомъ — $2x$ множителя, произведение — $6a^2x^2 - 4px$ припиши къ первому произведению подъ черпою, получишь требуемое произведение.

Примѣч. 1. Въ умноженіи Алгебраическихъ сложныхъ количествъ одного другимъ, надлежитъ всѣ части множимаго количества умножать каждымъ членомъ множителя, а потомъ всѣ произведенія сложить, коихъ сумма будетъ требуемое произведеніе.

Примѣч. 2. Въ умноженіи количествъ нѣтъ нужды наблюдать, какое бы изъ множимыхъ количествъ ни написано было прежде, на примѣръ: количество ли a умножится чрезъ p или p чрезъ a ; ибо будетъ произведеніе $ap = pa$, какъ на пр. $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$. Также $apd = pad$; ибо $ap = pa$, посему $apd = pad$ (Томъ I § 35). Положимъ, что $a = 2, p = 3, d = 4$, то будетъ $apd = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$; также и $apd = pad = dap = dpa = adp = pda$, то-есть, какая бы буква ни занимала первое мѣсто, произведеніе будетъ всегда одинако.

Такимъ же образомъ, какъ въ предъидущей задачѣ показано, умножаются всѣ сложныя количества, какъ-то изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

Умноживъ величину $a + b$ чрезъ $a - b$

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 - ab - b^2 \\
 \hline
 a^2 - b^2 = \text{произв.}
 \end{array}$$

При-

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 2ab + 3c^2 \\ 6ab - 2c^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12a^3b - 12a^2b^2 + 18abc^2 \\ - 4a^2c^2 \dots\dots + 4abc^2 - 6c^4 \end{array}$$

$$12a^3b - 12a^2b^2 - 4a^2c^2 + 22abc^2 - 6c^4. \text{ произв.}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r} 2a + b - 3c \\ 4a - 5b + 2c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8a^2 + 4ab - 12ac \\ - 10ab - 5b^2 + 15bc \\ + 4ac + 2bc - 6c^2 \end{array}$$

$$8a^2 - 6ab - 8ac - 5b^2 + 17bc - 6c^2 \text{ произв.}$$

Примѣръ IV.

$$\begin{array}{r} 4a^2 + 2ab + b^2 \\ 2a - b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8a^3 + 4a^2b + 2ab^2 \\ - 4a^2b - 2ab^2 - b^3 \end{array}$$

$$8a^3 - b^3 = \text{произв.}$$

§ 22. Примѣчаніе. Иногда произведеніе двухъ или болѣе сложныхъ количествъ, для краткости означается такимъ образомъ: $(a+b) \times (a-d)$ или $(a+b)(a-d)$; при чемъ разумѣнье должно, что величина $a+b$ умножается чрезъ $a-b$; но если бы напишется $a+b \times (a-d)$ или $a+b(a-d)$, то сѣ значилъ, что количество a приращается къ произведенію количествъ b и $a-d$.

О дѣленіи Алгебраическихъ величинъ.

§ 23. Опредѣл. Дѣленіе Алгебраическое есть средство, къ двумъ даннымъ количествамъ, по
еснѣ

есть къ дѣлимому и дѣлителю находить претіе, которое, будучи умножено дѣлителемъ, производить дѣлимое. Найденное количество именуетъ частнымъ.

§ 24. Положен. Если количество ab раздѣлился на a , то частное изображается такимъ образомъ $\frac{ab}{a}$, то есть дѣлитель пишется подъ дѣлимымъ количествомъ, при чемъ частное будетъ $= b$; ибо умножа дѣлителя a чрезъ частное b , произведение будетъ равно дѣлимому ab .

§ 25. Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, что при раздѣленіи простой величины на другую, частное число можно изображать одними только буквами дѣлителя и дѣлимаго, какъ-то $\frac{ap}{a}$, при чемъ $\frac{ap}{a} = p$; также $\frac{apd}{a} = pd$, $\frac{apd}{d} = ap$, $\frac{apd}{ad} = p$; ибо умножа дѣлителя ad частнымъ p , произведение apd будетъ дѣлимое.

§ 26. Теорема. При дѣленіи одинакихъ количествъ, показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго количества, на примѣръ: $\frac{a^6}{a^2}$ будетъ $= a^{6-2} = a^4$.

Доказ. Ибо умножа частное a^4 дѣлителемъ a^2 , произведение a^6 будетъ дѣлимое.

§ 27. Прибавл. И такъ $\frac{a^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, $\frac{a^3}{a^2} = \frac{aaa}{aa} = a$, $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$. Также и $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1$; ибо умножа дѣлителя a^5 частнымъ a^0 , по правилу умноженія (§ 19), будетъ $a^5 \times a^0 = a^{5+0}$
Б
 $= a^5$,

$= a^3$, или a^3 умножа і ю, произведеніе $a^3 \times 1 = a^3$ будетъ пожъ самое дѣлимое; по сей причинѣ всякое количество, имѣющее показателя нуль, будетъ $= 1$.

Примѣч. Ежели данныя количества будутъ имѣть предстоящихъ, то предстоящее дѣлимое дѣлится, по правилу Арифметическому, на предстоящее дѣлителя, и частное ихъ приписывается къ буквѣ частнаго количества, на прим. $\frac{6a^2}{2a} = 3a$, также $8ab$ раздѣля на $2a$, частное будетъ $\frac{8ab}{2a} = 4b$ и $\frac{15a^4}{3a} = 5a^{4-1} = 5a^3$; равнымъ образомъ $\frac{8a^4b^2}{2a} = 4a^3b^2$; ибо $4a^3b^2 \times 2a = 8a^4b^2 =$ дѣлимому.

§ 28. Теорема. При дѣленіи величинъ съ одинаковыми знаками въ частномъ будетъ знакъ $+$, а при дѣленіи количествъ съ разными знаками въ частномъ будетъ $-$, то есть $+:+ = +$ или $-:- = +$; но $+: - = -$ или $-: + = -$.

Доказат. Положимъ, что количество $+6a^4b$ должно раздѣлить на $+2a^2$, то частное будетъ $\frac{6a^4b}{2a^2} = 3a^2b$; ибо $+3a^2b \times +2a^2 = +6a^4b$; также и $\frac{-4a^2b}{-2a^2} = +2b$; ибо $+2b \times -2a^2 = -4a^2b$, равно дѣлимому. Равнымъ образомъ $\frac{+21a^3b^4}{-3a^2b} = -7ab^3$; ибо $-7ab^3 \times -3a^2b = +21a^3b^4$; также и $\frac{-2ad^3}{+2ad} = -d^2$; ибо $+2ad \times -d^2 = -2ad^3$ равно дѣлимому. Ч. д. н.

§ 29. *Задача.* Сложное количество раздѣлить на простое.

Рѣшен. Раздѣли каждой членъ дѣлимаго количества на даннаго дѣлителя, частное число съ подлежащими знаками напиши за черпою по правую сторону дѣлимаго; получишь требуемое частное, на примѣръ: чшобы раздѣлить количество $5a^2 - 10ad$ на $5a$, то раздѣля крайнее $5a^2$ чрезъ $5a$, частное a напиши за черпою, потомъ раздѣли $-10ad$ $5a$) $5a^2 - 10ad$ ($a - 2d$ чрезъ $5a$, частное $-2d$ $5a^2$ частн.
(§ 28.) напиши подлѣ
перваго количества a ; и $-10ad$
такъ частное $a - 2d$ бу- $-10ad$
детъ цѣлое, которое ежели умножится дѣлителемъ $5a$, то произведение будетъ дѣлимое $5a^2 - 10ad$.

§ 30. *Задача.* Сложное количество раздѣлить на другое сложноежъ.

Рѣшен. Дѣленіе Алгебраическихъ величинъ производится почти также, какъ и дѣленіе чиселъ, на примѣръ: ежели должно будетъ раздѣлить количество $a^2 - 2ab + b^2$ на $a - b$, то поставя дѣлителя съ лѣвой стороны дѣлимаго, раздѣли первой членъ a^2 чрезъ первой членъ a дѣлителя; ча- $a - b$) $a^2 - 2ab + b^2$ ($a - b$ частн.
стное a напиши $a^2 - ab$
по правую сторо-
ну за черпою, $-ab + b^2$
потомъ умножь $-ab + b^2$
всего дѣлителя 0
 $a - b$ найденнымъ количествомъ a , произведение
Б 2 $a^2 - ab$

$a^2 - ab$ вычпи изъ дѣлимаго ; написавши остатокъ подъ черпою, раздѣли первой членъ остатка $-ab$ чрезъ первой членъ a дѣлителя ; частное $-b$ припиши къ величинѣ a , потомъ умножь найденнымъ количествомъ $-b$ дѣлителя $a - b$, произведение $-ab + b^2$ вычпи изъ остатка ; и такъ частное будетъ $= a - b$. А чтобъ увѣришься, что $a - b$ есть частное, то умножь оное дѣлителемъ, произведение $(a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ будетъ дѣлимое.

Примѣръ II.

Дабы раздѣлить количество $a^3 + b^3$ чрезъ $a + b$, то написавши оное, какъ слѣдуетъ, раздѣли, какъ и пре- $a + b$) $a^3 + b^3$ ($a^2 - ab + b^2 =$ частн. где, коли-

$a^3 + a^2 b$	$a^3 + a^2 b$
$\text{чисство } a^3$	$- a^2 b + b^3$
$\text{на } a, \text{ час-}$	$- a^2 b - ab^2$
$\text{тное } a^2 \text{ по-}$	$+ ab^2 + b^3$
спавя на	$+ ab^2 + b^3$
своёмъ мѣ-	0
спѣ, умножь	

имъ дѣлителя, произведение $a^3 + a^2 b$ вычпи изъ дѣлимаго ; но какъ въ вычитаемомъ количествѣ знаки перемѣняющся въ противные, то остатокъ будетъ $-a^2 b + b^3$, копорой написавши подъ черпою, раздѣли $-a^2 b$ чрезъ первой членъ a дѣлителя ; частное $-ab$ поставя подлѣ найденнаго количества a^2 , умножь симъ количествомъ $-ab$ дѣлителя, произведение $(a + b) \times -ab = -a^2 b - ab^2$, вычпи изъ $-a^2 b + b^3$, остатокъ $+ab^2 + b^3$ напиши подъ черпою ; наконецъ первой членъ остатка $+ab^2$ раздѣли на первой

первой членъ a дѣлился, частное будетъ b^2 , которое, приписавши къ двумъ первымъ членамъ частнаго, умножь симъ количествомъ дѣлища, произведение $ab^2 + b^3$ вычти изъ оставшагося количества $ab^2 + b^3$, остатокъ будетъ $= 0$; а требуемое частное будетъ $a^2 - ab + b^2$.

Примѣръ III.

Раздѣлишь $9a^2 - 6ab + b^2$ на $3a - b$.

$3a - b$) $9a^2 - 6ab + b^2$ ($3a - b$ частн.
произв. дѣл. на $3a = 9a^2 - 3ab$

остатокъ $= -3ab + b^2$

произв. дѣлищ. на $-b = -3ab + b^2$

Примѣръ IV.

$8a^3 - b^3$ раздѣлишь на $2a - b$.

$2a - b$) $8a^3 - b^3$ ($4a^2 + 2ab + b^2$ частн.

$8a^3 - 4a^2b$

остатокъ $= +4a^2b - b^3$

$+4a^2b - 2ab^2$

остатокъ $= +2ab^2 - b^3$

$+2ab^2 - b^3$

0

Примѣръ V.

Раздѣлишь $a^8 - b^8$ на $a^2 - b^2$.

$a^2 - b^2$) $a^8 - b^8$ ($a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$ частное.

$a^8 - a^6b^2$

$a^6b^2 - b^8$

$a^6b^2 - a^4b^4$

$a^4b^4 - b^8$

Б 3

$a^4b^4 - a^2b^6$

$$a^4b^4 - a^2b^6$$

$$a^2b^6 - b^8$$

$$a^2b^6 - b^8$$

□

Примѣръ VI.

$$c^2 + 2b - 1) c^4 - bc^2 - 6b^2 + 5b - 1 (c^2 - 3b + 1$$

$$c^4 + 2bc^2 - c^2 \quad \text{частное}$$

$$- 3bc^2 + c^2 - 6b^2 + 5b - 1$$

$$- 3bc^2 \dots - 6b^2 + 3b$$

$$c^2 \dots + 2b - 1$$

$$c^2 \dots + 2b - 1$$

○

Примѣръ VII.

$$1-2x \mid 1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5 \mid 1-3x+3x^2-x^3$$

$$+x^2 \mid 1-2x+x^2$$

частное.

$$-3x+9x^2-10x^3$$

$$-3x+6x^2-3x^3$$

$$3x^3-7x^3+5x^4$$

$$3x^3-6x^3+3x^4$$

$$-x^3+2x^4-x^5$$

$$-x^3+2x^4-x^5$$

○

§ 31. Примѣч. Ежели въ членахъ дѣлимаго и дѣлителя будетъ одна буква изъявлять разныя степени, то должно разположить члены оныхъ количествъ въ разсужденіи разныхъ степеней той буквы, поспавляя сперва потѣ членъ

членъ, въ которомъ буква съ большимъ показателемъ, а въпорымъ членомъ ту величину, у которой та же буква имѣетъ показателя, меньшаго и такъ далѣе, на примѣръ: ежели должно будетъ раздѣлить $22a^4b + 9ab^4 + 12a^2b^3 + 19a^3b^2 + 8a^5$ на $4a^3 + 2ab^2 + 3b^3 + 5a^2b$, то надлежитъ дѣлимое въ разсужденіи буквы a разположить такимъ порядкомъ: $8a^5 + 22a^4b + 19a^3b^2 + 12a^2b^3 + 9ab^4$; дѣлителя же $4a^3 + 5a^2b + 2ab^2 + 3b^3$, а потомъ производить дѣленіе какъ и прежде.

$$\begin{array}{r|l} 4a^3 + 5a^2b & 8a^5 + 22a^4b + 19a^3b^2 + 12a^2b^3 + 9ab^4 \\ + 2ab^2 + 3b^3 & 8a^5 + 10a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2a^2 + 3ab \\ 2a^2 + 3ab \end{array}$$

$$\hline 12a^4b + 15a^3b^2 + 6a^2b^3 + 9ab^4$$

$$\hline 12a^4b + 15a^3b^2 + 6a^2b^3 + 9ab^4$$

О

§ 32. Задача. Даннаго количества найти всѣхъ дѣлителей.

Рѣшен. Положимъ, что требуется найти количества $x^3p + x^2p$ всѣхъ дѣлителей; то сперва раздѣли члены сего количества чрезъ простаго дѣлителя p , частное будетъ $x^3 + x^2$, которое раздѣли чрезъ простаго дѣлителя x , частное будетъ $x^2 + x$, что также раздѣли еще на x , частное будетъ $x + 1$; напоследокъ раздѣли сіе количество на $x + 1$, частное будетъ 1 ; такимъ образомъ найденные дѣлители $p, x, x, x + 1$ именуяся простыя; а чтобы найти сложныхъ дѣлителей, то умножь простыхъ дѣлителей по два сряду между собою, коихъ произведенія $px, px + p, x^2, x^2 + x$ бу-

Б 4 душъ

душѣ дѣлители двойные; потомъ умножь по три, по сыщутся тройные дѣлители px^2 , $px^2 + px$, $x^3 + x^2$, и наконецъ умножь по чепыре, будетъ $px^3 + px^2$; и такъ пребуемые дѣлители суть p , x , $x + 1$, px , $px + p$, x^2 , $x^2 + x$, px^2 , $px^2 + px$, $x^3 + x^2$, $px^3 + px^2$, изъ коихъ на каждаго данное количество безъ оспатка раздѣлено быть можетъ.

§ 33. Прибавлен. Положимъ, что пребуется сыскать всѣхъ дѣлителей числа 30: для сего раздѣли число 30 на 2, частное будетъ 15, которое раздѣля на 3, частное 5 раздѣли на 5, въ частномъ будетъ 1. И такъ простые дѣлители числа 30 будутъ 1, 2, 3 и 5; но дабы найти сложныхъ дѣлителей, то умножа изъ найденныхъ дѣлителей по 2, сыщутся новые дѣлители, 6, 10 и 15; наконецъ умножь простыхъ дѣлителей по 3, произведение будетъ 30; и такъ пребуемые дѣлители числа 30 будутъ слѣдующія: 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30, изъ коихъ на каждаго число 30 безъ оспатка раздѣлено быть можетъ.

О дробяхъ или ломаныхъ числахъ.

§ 34. Опрѣделен. Когда частнаго цѣлымъ количествомъ изобразить не можно, тогда оное изображается дробью, на примѣръ: ежели должно будетъ раздѣлить количество b на d , то частное $\frac{b}{d}$ называется дробь или ломаное число.

Количество d означаетъ, на сколько частей цѣлое число раздѣлено, и называется знаменателемъ,

тель, а верхнее b , показываешь, сколько пѣхъ частей изъ цѣлаго взято, и именуется числитель, (Томъ I. § 69).

§ 35. Теорема. Величина дроби не перемѣняется, когда числитель и знаменатель на какое нибудь количество умножись.

Доказат. Представимъ себѣ, что дробь $\frac{a}{b} = c$: и такъ когда каждое изъ сихъ равныхъ количествъ умножись чрезъ b , то первое произведение будетъ a (поелику произведение частнаго $\frac{a}{b}$ на дѣлителя b равно дѣлимому a (§ 23) равно впрочему bc ; потомъ естли сии количества умножась произвольною величиною, на примѣръ n , то произведение an будетъ равно bnc (Часть I § 35), по раздѣленіи же сихъ количествъ чрезъ bn , частное $\frac{an}{bn}$ будетъ $= c = \frac{a}{b}$.

Слѣдовательно величина дроби не перемѣняется, когда числитель и знаменатель какимъ нибудь количествомъ умножись, то естъ $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

Слѣдст. Изъ сего удобно можно видѣть, что величина дроби не перемѣняется, когда числитель и знаменатель на какое нибудь количество раздѣлится, что всего легче усмотрѣть можно изъ изображенной дроби $\frac{an}{bn}$; ибо по раздѣленіи

числителя и знаменателя на n , будетъ дробь

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = c.$$

§ 36. *Задача.* Данныя дроби, имѣющія разныхъ знаменателей, привести къ одинакому знаменателю.

Рѣшен. I. Если будетъ только двѣ дроби; то числителя и знаменателя первой дроби умножь знаменателемъ другой, а числителя и знаменателя второй дроби знаменателемъ первой, будешь имѣть дроби съ одинаковыми знаменателями, даннымъ равныя, на примѣръ: ежели даны будутъ дроби $\frac{b}{d}$ и $\frac{x}{p}$, то будетъ $\frac{b}{d} \times p = \frac{bp}{dp}$, и $\frac{x}{p} \times d = \frac{dx}{dp}$ (§ 35). Также и $\frac{m}{3}$, $\frac{gcd}{n}$ приведены къ одному знаменателю $\frac{mn}{3n}$, $\frac{gcd}{3n}$

2. Для приведенія нѣсколькихъ дробей къ одному знаменателю, умножь числителя и знаменателя каждой дроби произведеніемъ знаменателей прочихъ дробей, отъ чего произшедшія дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, на примѣръ: ежели будутъ дроби $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{x}{p}$, то умножь числителя и знаменателя дроби $\frac{b}{a}$ произведеніемъ np знаменателей двухъ послѣднихъ дробей, будетъ $\frac{b}{a} = \frac{bnp}{anp}$; попомъ числителя и знаменателя дроби $\frac{c}{n}$ умножь произведеніемъ

ніемъ

ніемъ $ар$ знаменателей прочихъ дробей, будетъ
 $\frac{e}{n} = \frac{cap}{nar}$, и наконецъ числителя и знаменателя
 дроби $\frac{x}{p}$ умножь произведеніемъ an знаменателей
 прочихъ дробей, будетъ $\frac{x}{p} = \frac{xan}{pan}$; такимъ обра-
 зомъ приведенныя дроби къ одному знамена-
 лю, даннымъ равныя, суть слѣдующія: $\frac{ban}{anp}$,
 $\frac{cap}{anp}$, $\frac{xan}{anp}$.

Равнымъ образомъ приведутся къ одинакому
 знаменателю и слѣдующія дроби: $\frac{a}{b}$, $\frac{2c}{d}$, $\frac{e}{3n}$.

$$\frac{\frac{a}{b}, \frac{2c}{d}, \frac{e}{3n}}{\frac{3adn}{3bdn}, \frac{6ben}{3bdn}, \frac{bed}{3bdn}} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{2x+b}{3a}, \frac{2r-d}{ec}}{\frac{2ecx+bec}{3ace}, \frac{6ar-3ad}{3ace}}$$

Доказат. Справедливость помянутыхъ рѣ-
 шеній усмотрѣть можно изъ того, что числи-
 тель и знаменатель каждой дроби умножаемы были
 однимъ количествомъ; слѣдовательно приведенныя
 дроби равны даннымъ (§ 35).

§ 37. **Задача.** Данную дробь, не перемѣняя ея
 величины, представить (если можно) въ мень-
 шемъ количествѣ буквъ.

Рѣшен. Числителя и знаменателя данной
 дроби раздѣли на такую букву, которая на-
 ходится въ числителѣ и знаменителѣ, чрезъ
 что получишь требуемую дробь, на примѣръ:
 ежели будетъ дробь $\frac{ab}{ac}$, то раздѣли числителя

и знаменателя на a , будетъ $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ (§ 35 слѣд.)

Также дробь $\frac{bnd}{cna}$ по раздѣленіи числителя и знаменателя чрезъ na будетъ $= \frac{b}{c}$.

§ 38. Задача. Данное цѣлое количество съ дробью, на примѣръ, $ab + \frac{c}{q-3}$, представить въ одной дроби.

Рѣшен. Цѣлое количество ab умножь знаменателемъ $q-3$, потомъ соедини сіе произведение съ числителемъ c , подпиши тогожь знаменателя; будешь имѣть требуемую дробь, какъ изъ слѣдующаго видно:

$$\begin{array}{r} ab + \frac{c}{q-3} \\ \hline \frac{ab(q-3) + c}{q-3} = \frac{abq - 3ab + c}{q-3} = ab + \frac{c}{q-3}. \end{array}$$

О сложеніи Алгебраическихъ дробей.

§ 39. Задача. Данныя дроби сложить.

Рѣшен. 1. Если данныя дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, то соедини числителей подлежащими знаками, подъ суммою ихъ подпиши того же знаменателя; получишь сумму дробей, на примѣръ: сумма дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{cd}{b}$ и $\frac{mn}{b}$ будетъ $\frac{a}{b} + \frac{cd}{b} + \frac{mn}{b} = \frac{b+cd+mn}{b}$.

2. Ежели дроби будутъ имѣть разныхъ знаменателей, то приведя ихъ сперва къ одинаковому знаменателю, сложи какъ и прежде, и если можно, сдѣлай сокращеніе; получишь требуемую сумму дробей, на примѣръ: $\frac{a}{b}$ сложишь съ $\frac{c}{d}$, сумма будетъ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Такимъ же образомъ слагаются и прочія дроби, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

Сложишь $\frac{a}{a-b}$ съ $\frac{b}{a+b}$.

$$\left(\frac{a}{a-b} \right) + \left(\frac{b}{a+b} \right)$$

$$\frac{a^2 + ab + ab - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2} = \text{сум. дроб.}$$

Примѣръ II.

Дроби $3a^2 - \frac{b^3}{2a}$, $\frac{2a^2}{3}$ и $\frac{3b^3}{5a}$ сложишь.

$$\left(3a^2 - \frac{b^3}{2a} \right) + \frac{2a^2}{3} + \frac{3b^3}{5a}$$

$$\frac{90a^4 - 15ab^3 + 20a^4 + 18ab^3}{30a^2} = \frac{110a^4 + 3ab^3}{30a^2} = \frac{110a^3 + 3b^3}{30a}$$

суммѣ дробей.

Примѣръ III.

Дроби $\frac{3a + 2ab + 2b}{2a - b}$ и $\frac{4a - 3ab + 3b}{4a + b}$ сложишь.

$$\left(\frac{3a + 2ab + 2b}{2a - b} \right) + \left(\frac{4a - 3ab + 3b}{4a + b} \right)$$

$$12a^2 + 8a^2b + 8ab$$

$$3ab + 2ab^2 + 2b^2$$

$$8a^2 - 6a^2b + 6ab$$

$$- 4ab + 3ab^2 - 3b^2$$

$$20a^2 + 2a^2b + 13ab + 5ab^2 - b^2$$

$$8a^2 - 2ab - b^2 = \text{суммѣ дан. дробей.}$$

О вычитаніи Алгебраическихъ дробей.

§ 40. Задача. Данную дробь вычести изъ другой.

Рѣшен. I. Ежели дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, то числителя одной дроби вычти изъ числителя другой (§ 16); подѣли разность напиши тогожъ знаменателя, получишь пребуемую разность, на примѣръ: изъ $\frac{a}{b}$ вычести $\frac{c}{b}$ разность будетъ $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$; такъ же и $\frac{m}{de}$ безъ $\frac{ac}{de}$ будетъ $\frac{m}{de} - \frac{ac}{de} = \frac{m-ac}{de}$.

2 Когда данныя дроби будутъ имѣть разныхъ знаменателей, то приведя ихъ къ одинаковому знаменателю (§ 36.); вычти числителя одной дроби изъ числителя другой, а подѣли остаткомъ напиши общаго ихъ знаменателя; будешь имѣть искомую разность дробей, на примѣръ: изъ $\frac{a}{b}$ вычести $\frac{c}{d}$, изъ коихъ по приведеніи къ одному знаменателю, будетъ дробь $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ и $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ (§ 36), и такъ искомая разность будетъ $\frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

Такимъ же образомъ вычитаются и прочія дробы, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ усмотрѣть можно:

Примѣръ I.

Изъ $a + \frac{c}{b}$ вычестъ $\frac{m}{2d}$.

$$\begin{array}{r} a + \frac{c}{b} \\ \hline \left(\frac{ab+c}{b} \right) - \frac{m}{2d} \\ \hline \frac{2abd+2cd-bm}{2bd} = \text{разнос.} = a + \frac{c}{b} - \frac{m}{2d}. \end{array}$$

Примѣръ II.

Изъ $\frac{4a-2b}{5a}$ вычестъ $\frac{2a-b}{3a}$.

$$\left(\frac{4a-2b}{5a} \right) - \left(\frac{2a-b}{3a} \right)$$

$12a^2 - 6ab =$ прозв. числ. 1 й дроб. на знам. 2й

$10a^2 - 5ab =$ произ. числ. 2 й дроб. на знам. 1й

$$\frac{2a^2-ab}{15a^2} = \frac{2a-b}{15a} = \text{разности.}$$

Примѣръ III.

Изъ $\frac{3a^2-b}{4a+b}$ вычестъ $\frac{2b}{a+b} + a$.

$$\left(\frac{3a^2-b}{4a+b} \right) - \left(\frac{2b+a^2+ab}{a-b} \right)$$

$$3a^3 - ab - 3a^2b + b^2$$

$$4a^3 + 8ab + 4a^2b + 2b^2 + a^2b + ab^2$$

$$\frac{-a^3 - 9ab - 7a^2b - b^2 - a^2b - ab^2}{4a^2 - 3ab - b^2} = \frac{-a^3 - 9ab - 8a^2b - b^2 - ab^2}{4a^2 - 3ab - b^2}$$

разн.

Примѣръ IV.

изъ $\frac{3b-d}{2b+2d}$ вычестъ $\frac{2b+2d}{3d-2b}$.

$$\left(\frac{3b-d}{2b+2d} \right) - \left(\frac{2b+2d}{3d-2b} \right)$$

$$\frac{15b^2 - 13bd + 2d^2}{4b^2 + 8bd + 4d^2}$$

$$\frac{11b^2 - 21bd - 2d^2}{6b^2 + 2bd - 4d^2} = \text{разности.}$$

$$\frac{11b^2 - 21bd - 2d^2}{6b^2 + 2bd - 4d^2} = \text{разности.}$$

О умноженіи дробей цѣлымъ количествомъ.

§ 41. Задача. Умножить дробь цѣлымъ числомъ.

Рѣшен. Данной дроби числителя умножь цѣлымъ количествомъ, а подѣ произведеніемъ написти того же знаменателя; получишь требуемое произведеніе, на примѣръ: $\frac{3}{4}$ умножить чрезъ 5, произведеніе будетъ $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$; также и $\frac{c}{d} \times a = \frac{ac}{d}$.

Доказат. Поелику умножить не что иное, какъ данную дробь увеличить во столько разъ, сколько цѣлое количество единицъ въ себѣ заключаетъ; слѣдственно должно было только число частей данной дроби, то есть числителя умножить, а знаменателя, яко именованіе дроби, такоужѣ написать. ч. д. н.

Примѣръ I.

Дробь $\frac{ac}{4bd}$ умножить чрезъ $2b$; произведеніе будетъ $\frac{ac}{4bd} \times 2b = \frac{2abc}{4bd} = \frac{ac}{2d}$.

Слѣд-

Слѣдств. Изъ сего видно, что при умноженіи данной дроби цѣлымъ количествомъ, или числителя умножь, или знаменателя, когда можно будетъ, раздѣли на данное цѣлое число, получишь требуемое произведеніе, на примѣръ:

$$\frac{2c}{5n^2} \times 5n^2 = \frac{2c}{n}.$$

Примѣръ II.

Дробь $\frac{c}{d}$ умноживъ цѣлымъ количествомъ $n+d$.

$$\frac{c}{d} \times (n+d) = \frac{nc+dc}{d} = \text{произвед.}$$

Примѣръ III.

$$\left(\frac{a+b}{c}\right) \times (a-b) = \frac{a^2+ab-ab-b^2}{c} = \frac{a^2-b^2}{c} = \text{произв.}$$

Примѣръ IV.

$$\left(\frac{a^2-b^2}{3c-d}\right) \times (2a^2+2b^2) = \frac{2a^4-2a^2b^2+2a^2b^2-2b^4}{3c-d} = \frac{2a^4-2b^4}{3c-d} = \text{произв.}$$

О Дѣленіи дробей на цѣлыя количества.

§ 42. **Задача.** Данную дробь раздѣлить на цѣлое количество.

Рѣшен. I. Раздѣля данной дроби числителя на цѣлое количество, подѣ частнымъ числомъ поставь того же знаменателя, получишь иско-
мое частное количество, на примѣръ: $\frac{8}{9}$ раздѣ-
лили на 4, частное будетъ $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$; также
если дробь $\frac{2cb}{a-b}$ раздѣлится на b , то частное бу-
детъ $\frac{2bc}{a-b} : b = \frac{2c}{a-b}$. В Дока-

Доказат. Поелику числитель, то есть число частей составляющихъ дробь, раздѣленъ на столько частей, сколько дѣлитель единицъ въ себѣ заключаетъ; по сему должно было знаменателя, яко именованіе дроби, написать того же; слѣдовательно отъ такого раздѣленія произшедшая дробь есть искомое частное.

Рѣшен. 2. Ежели числитель данной дроби на цѣлое число раздѣлился не можетъ; тогда умножь знаменателя дроби дѣлителемъ, надъ симъ произведеніемъ написавъ того же числителя, получишь пребуемое частное, на примѣръ: ежели дробь $\frac{a}{c}$ раздѣлился на d , то частное будетъ $\frac{a}{c} : d = \frac{a}{dc}$; также и $\frac{n}{a} : (c-d) = \frac{n}{ac-ad}$ частное. Равнымъ образомъ и $\frac{3}{2} : 4 = \frac{3}{8}$ (Часть I § 102.)

Доказат. Дабы доказать истинну сего рѣшенія, то умножь числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{c}$ дѣлителемъ d , отъ чего произшедшая дробь $\frac{a}{c} \times d = \frac{ad}{dc}$ будетъ равна $\frac{a}{c}$ (§ 35); и пакъ по раздѣленіи числителя сей новой дроби $\frac{ad}{dc}$ на цѣлое число d по первому рѣшенію, частное будетъ $\frac{ad}{dc} : d = \frac{a}{cd}$, тожъ самое, какое произошло отъ умноженія знаменателя дѣлителемъ d , то есть $\frac{a}{c} : d = \frac{a}{cd}$; слѣдственно произшедшая помянутымъ образомъ дробь $\frac{a}{cd}$ есть пребуемое частное.

§ 43. Слѣдств. Изъ сего явствуетъ: когда данную дробь должно будетъ раздѣлить на цѣлое число, то или числителя раздѣли, или знаменателя умножь цѣлымъ количествомъ; будешь имѣть въ обоихъ случаяхъ требуемое частное число, на примѣръ: $\frac{a^2}{x} : a = \frac{a}{x}$; тожь произойдетъ частное, ежели данной дроби, вмѣсто того, чтобы дѣлить числителя, умножится знаменатель, а числитель поставится пошъ же, то есть $\frac{a^2}{x} : a = \frac{a^2}{ax} = \frac{a}{x}$ (§ 35. Слѣд.)

Такимъ же образомъ дѣляясь и прочія дроби, какъ изъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

Дробь $\frac{bc}{a+d}$ раздѣлишь на $c-d$
 $\left(\frac{bc}{a+d}\right) : (c-d) = \frac{bc}{ac+cd-ad-d^2}$ есть частн.

Примѣръ II.

$\left(\frac{m^2-n^2}{c^2}\right) : (m+n) = \frac{m-n}{c^2}$, есть частное отъ раздѣленія числителя на цѣлое количество $m+n$.

Примѣръ III.

$\frac{mc^2+b^2}{c-b}$ раздѣлишь на $a+b$
 $\left(\frac{mc^2+b^2}{c-b}\right) : (a+b) = \frac{mc^2+b^2}{ac-ab+bc-b^2} = \text{частн.}$

О умноженіи дроби дробью.

§ 44. Задача. Данную дробь умножить другою.

В 2

Рѣ-

Рѣшен. Умножь числителя одной дроби числителемъ другой, и знаменателя первой знаменателемъ второй; подъ произведеніемъ числителей напиши произведеніе знаменателей: будешь имѣть искомое произведеніе, на примѣръ:
 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, есть требуемое произведеніе.

Доказат. Ибо ежели данная дробь $\frac{a}{b}$, умножись сперва однимъ количествомъ c , то произведеніе $\frac{ac}{b}$ будетъ больше подлиннаго; поелику должно умножить не на цѣлое количество c , но на c раздѣленное на d ; по сей причинѣ произведеніе $\frac{ac}{b}$ надлежитъ раздѣлить на d , отъ чего произшедшее частное $\frac{ac}{bd}$ (§ 42.) будетъ подлинное произведеніе. Ч. д. н.

Такимъ же образомъ и прочія дроби одна другою умножаются, какъ слѣдуетъ:

Примѣръ I.

Дробь $\frac{a+b}{2d}$ умножись дробью $\frac{a-b}{3c}$

$$\left(\frac{a+b}{2d}\right) \times \left(\frac{a-b}{3c}\right) = \frac{a^2+ab-ab-b^2}{6cd} = \frac{a^2-b^2}{6cd} = \text{произ.}$$

Примѣръ II.

$$\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{2d} \times \frac{c+d}{a+b} = \frac{a^2bc+abd}{2acd+2bcd} = \text{произвед.}$$

Примѣръ III.

$$\left(\frac{c+2n}{a+b}\right) \times \left(\frac{2c-m}{2p+d}\right) = \frac{2c^2+4cn-cm-2nm}{2ap+2bp+ad+bd} \text{ произв.}$$

О дѣленіи дробей чрезъ дробь.

§ 45. Задача. Данную дробь раздѣлить на другую.

Рѣшен. I. Ежели данныя дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, то раздѣля числителя дѣлимой дроби на числителя другой, частное число покажетъ, сколько разъ одна дробь содержится въ другой, на примѣръ: $\frac{8}{9} : \frac{2}{9}$, частное будетъ $\frac{8}{9} = 4$; также если дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлится на $\frac{c}{b}$, то частное будетъ $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$.

2. Когда данныя дроби будутъ имѣть разныхъ знаменателей, то сперва приведи ихъ къ одному знаменателю, а потомъ, какъ и прежде раздѣля числителя дѣлимой дроби на числителя дѣлящей, получишь частное, на примѣръ: дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлишь на $\frac{c}{d}$; то приведя ихъ къ одному знаменателю, будетъ $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ (§ 36); и такъ частное будетъ $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$; также $\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} : \frac{4}{6} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ частное.

Доказат. Ибо раздѣлить не что иное, какъ узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, но числа одинакихъ частей, составляющихъ дроби, суть ихъ числители; слѣдовательно должно было раздѣлить только числителя дѣлимой дроби на числителя дѣлящей, то есть познать, сколько разъ число частей одной дроби, содержится въ числѣ частей дру-

гой; по сей причинѣ, знаменатели яко имена дробей, въ дѣленіе входить не должны.

§ 46. Слѣдствіе. Изъ втораго рѣшенія удобно можно видѣть, что произведеніе ad , числителя a дѣлимой дроби, на знаменателя d дѣлящей, есть числитель, а произведеніе bc числителя c дѣлящей, на знаменателя b дѣлимой дроби, есть знаменатель частнаго количества; слѣдовательно частное число можетъ быть изображено одними только помянутыми произведеніями, безъ общаго знаменателя дробей, какъ слѣдуетъ: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

$\frac{ad}{bc}$ частное, то же, что и прежде.

Примѣръ I.

Раздѣлить дробь $\frac{a-c}{n}$ на $\frac{a+c}{2n}$.

$$\left(\frac{a-c}{n} \right) : \left(\frac{a+c}{2n} \right) = \frac{2an - 2cn}{an + nc} = \frac{2a - 2c}{a + c} = \text{частному.}$$

Примѣръ II.

Дробь $\frac{4a-b}{2c-b}$ раздѣлить на $2a - \frac{a}{3b}$.

$$\left(\frac{4a-b}{2c-b} \right) : \left(2a - \frac{a}{3b} \right) = \frac{\left(\frac{4a-b}{2c-b} \right) : \left(\frac{6ab-a}{3b} \right)}{\frac{12ab - 3b^2}{12abc - 2ac - 6ab^2 + ab}} = \text{частному.}$$

При-

Примѣръ III.

Дробь $\frac{2}{3}ab - \frac{a}{a-b}$ раздѣлить на $\frac{2}{3}a - b$.

Здѣсь сперва должно дробь составляющія дѣлимое количество, привести къ одному знаменателю, а дробь означающую дѣлителя, представить одною дробью, а потомъ уже раздѣлить какъ въ предъидущихъ примѣрахъ показано:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2ab}{3} - \frac{a}{a-b} \right) : \left(\frac{2a}{3} - b \right) \\ & \frac{\left(\frac{2a^2b - 2ab^2 - 3a}{3a - 3b} \right) : \left(\frac{2a - 3b}{3} \right)}{\frac{6a^2b - 6ab^2 - 9a}{6a^2 - 9ab - 6ab + 9b^2} = \frac{6a^2b - 6ab^2 - 9a}{6a^2 - 15ab + 9b^2} \text{ частн.}} \end{aligned}$$

Примѣръ IV.

Дробь $\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - 3c \right)$ раздѣлить на $\left(\frac{2}{3}b : a - \frac{2}{3}b \right)$.

Сперва раздѣля въ числитель дѣлимой дроби $\frac{1}{3}b$ на $\frac{2}{3}b - 3c$, вычпи изъ $\frac{2}{3}a$, получишь дѣлимую дробь; потомъ раздѣля также числителя $\frac{1}{3}b$ дѣлящей дроби на $a - \frac{2}{3}b$, будешь имѣть дѣлящую дробь, и наконецъ соверши дѣленіе данныхъ дробей, какъ и прежде.

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{2}{3}b : \frac{2}{3}b - 3c}{\frac{b}{2} : \frac{2b - 9c}{3}} \quad \frac{\frac{1}{3}b : a - \frac{2}{3}b}{\frac{b}{2} : \frac{3a - 2b}{3}} \\ & \frac{3b}{4b - 18c} \quad \text{сіе частное вычпи} \quad \frac{3b}{6a - 4b} \text{ дѣлитель.} \end{aligned}$$

изъ $\frac{2a}{3}$, остатокъ будешь

$$\frac{2a}{3} - \frac{3b}{4b - 18c} = \frac{8ab - 36ac - 9b}{12b - 54c} \text{ дѣлимая дробь.}$$

О разрѣшеніи дробей

И такъ будетъ:

$$\frac{\left(\frac{8ab-36ac-9b}{12b-54c}\right) : \left(\frac{3b}{6a-4b}\right)}{\frac{48a^2b-216a^2c-54a^2b-32ab^2+144acb+36b^2}{36b^2-162bc}} \quad \text{частное.}$$

О разрѣшеніи дробей на безконечные ряды.

§ 47. *Опредѣл.* Разрѣшеніе дробей на безконечные ряды есть способъ, посредствомъ котораго изображается дробь въ произвольномъ числѣ членовъ, такъ что сумму ихъ вообще можно принять безъ чувствительной погрѣшности за подлинное частное, данную дробь изображающее.

§ 48. *Положен.* Безконечно большое число означается слѣдующимъ знакомъ (∞); изъ сего видно, что безконечно большая величина дробью изображенная, представится можетъ чрезъ $\frac{\infty}{1}$; напротивъ того безконечно малая часть, или ничего, изобразится чрезъ $\frac{1}{\infty}$.

§ 49. *Задача.* Данную дробь $\frac{1}{1-a}$ изобразить безконечнымъ рядомъ.

Рѣшен. раздѣли числителя 1 цу на знаменателя $1-a$, въ частномъ числѣ первой членъ будетъ 1; потомъ остатокъ a , раздѣли на первой членъ дѣлителя, въ частномъ будетъ a вторымъ членомъ, коимъ умножи дѣлителя, произведеніе $a-a^2$ вычти изъ a , останется a^2 , которое, также раздѣли на первой членъ дѣлителя, въ частномъ числѣ будетъ третій членъ a^2 , и такъ сіе дѣйствіе, продолжая далѣе непрестанно, превратится данная дробь $\frac{1}{1-a}$ въ безконечной рядъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$1-a)$

$$(1-a)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n) = \frac{1}{1-a}$$

$$\frac{1-a}{1-a} = 1$$

$$+ a$$

$$a - a^2$$

$$+ a^2$$

$$a^2 - a^3$$

$$+ a^3$$

$$a^3 - a^4$$

$$+ a^4$$

$$a^4 - a^5$$

$$+ a^5$$

$$a^5 - a^6$$

$$\frac{a^6}{1-a} \text{ и прочая.}$$

$$\dots \frac{a^n}{1-a} = \frac{\infty}{1-a}$$

Доказат. Дабы вывести из сомнѣнiя, что безконечный рядъ частнаго равенъ предложенной дроби; то положимъ $a = 1$, отъ чего выйдетъ нашъ рядъ $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ и такъ безконечно $= \frac{\infty}{1}$, которой данной дроби

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-1}$$

и раздѣленная на 0, въ частномъ числѣ производитъ безмѣрно великое число; ибо ежели представимъ себѣ, что

$$\text{безмѣрно малое количество будетъ } \frac{1}{1000000000000} = \frac{1}{\infty} \text{ по}$$

положенiю, которое за нуль или за ничто почесть можно, и такъ когда 1 ца раздѣлится на сѣ безмѣрно малое количество, то есть на $\frac{1}{\infty}$ или на 0, то частное число

$$\text{будетъ } 1 : \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{1} \text{ безконечно большая величина, состав}$$

$$\text{ляющая безконечной рядъ частнаго, равнаго } \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-1}$$

$$= \frac{\infty}{0} \text{ ч. д. н.}$$

§. 50. Прибавлен. Еслии положимъ $a = 2$, то будетъ рядъ изображающій помянутую дробь $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ и такъ безконечно, который долженъ быть $= \frac{1}{1-2}$, то есть, $\frac{1}{-1} = -1$, что кажется не вѣроятно. Но при семъ надлежитъ примѣчать, что ежели въ предписанномъ ряду должно будетъ остановиться у 64, то къ $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, должно еще придать оставшуюся отъ дѣленія дробь $\frac{128}{1-2} = \frac{128}{-1}$ ю $= 128$; отъ чего произойдетъ $127 - 128 = -1$ предложенной дроби $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1}$

Примѣчан. I е. Когда вмѣсто a возмущся числа меньше единицы, на прим: $a = \frac{1}{2}$, то будетъ $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$

$1 : \frac{1}{2} = 2$, которое слѣдующему ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} +$ и проч. безконечно $+ \frac{1}{\infty}$ равно быть должно. И такъ когда изъ сихъ членовъ возмущся только 3, то есть $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, то не достанетъ $\frac{1}{4}$; когда же возмущся 4, то сумма ихъ будетъ $1\frac{7}{8}$, гдѣ не достанетъ $\frac{1}{8}$; 5 же членовъ вмѣстѣ, составляя сумму $1\frac{15}{16}$, гдѣ не достанетъ еще $\frac{1}{16}$; изъ сего удобно можно видѣть, чѣмъ больше взято будетъ членовъ, тѣмъ недостатокъ будетъ меньше; слѣдовательно, ежели рядъ продолжится безконечно, то совсѣмъ никакого недостатка не будетъ.

II. Еслии положимъ $a = \frac{1}{3}$, то будетъ дробь $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, а безконечный рядъ изображающій оную, будетъ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{\infty}$. И такъ когда возмущся 3 члена, то сумма ихъ $1\frac{4}{9}$ будетъ $\frac{1}{9}$ ю меньше предложенной дроби $1\frac{1}{2}$; а въ суммѣ 4 хъ членовъ $1\frac{13}{27}$ не достанетъ еще $\frac{1}{34}$; изъ сего видно, чѣмъ больше

больше взято будетъ членовъ, тѣмъ погрѣшность будетъ вътрое меньше предвѣдущей разности, слѣдовательно наконецъ она уничтожится.

III Пусть будетъ $a = \frac{1}{4}$, то будетъ дробь $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 : \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$, а безконечный рядъ изображающій оную дробь, будетъ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \dots + \frac{1}{\infty}$, изъ котораго ежели возьмется три члена, то сумма ихъ $1\frac{5}{8}$ будетъ $\frac{1}{48}$ ю частію меньше предложенной дроби $1\frac{1}{3}$; а въ суммѣ 4 хъ членовъ $1\frac{21}{64}$ не достанетъ еще $\frac{1}{192}$, слѣдовательно наконецъ оной недоспашокъ уничтожится.

§ 51. Равнымъ образомъ и сія дробь $\frac{1}{1+a}$ обратится въ безконечный рядъ, когда числитель 1 на знаменателя $1+a$ безконечно дѣлится будетъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$(1+a) 1 **** (1-a+a^2-a^3+a^4-a^5 \text{ и проч.}$

$$\begin{array}{r}
 1+a \\
 \hline
 -a \\
 \hline
 1-a-a^2 \\
 \hline
 +a^2 \\
 \hline
 a^2+a^3 \\
 \hline
 -a^3 \\
 \hline
 -a^3-a^4 \\
 \hline
 +a^4 \\
 \hline
 a^4+a^5 \\
 \hline
 -a^5 \\
 \hline
 -a^5-a^6 \\
 \hline
 +a^6 \text{ и проч.}
 \end{array}$$

И такъ предложенная дробь $\frac{1}{1+a}$ равна сему безконечному ряду $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5 \text{ и проч.}$ Ежели положимъ $a=1$,

$a = 1$, то изобразится сѣ примѣчанія достойное уравненіе $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ и проч. бесконечно,

что кажется не можетъ быть справедливо; ибо когда рядъ кончится на -1 , то выйдетъ 0, а если на $+1$ остановится, то выйдетъ 1; однакожъ если изобразимъ, что помянутое дѣленіе продолжаться будетъ бесконечно, не останавливаясь ни при -1 , ни же при $+1$: то тогда сумма будетъ ни 1, ни 0, но среднее между ими выйдетъ $\frac{1}{2}$.

§ 52 Прибавлен. Іе. Пусть будетъ $a = \frac{1}{2}$, то предложенная дробь $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$, равна будетъ слѣдующему ряду: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \dots - \frac{1}{\infty}$, изъ котораго если возмется три члена, то сумма ихъ будетъ $= \frac{3}{4}$, больше $\frac{1}{12}$ частію; а сумма 4 членовъ $\frac{5}{8}$ будетъ $\frac{1}{24}$ ю частію меньше $\frac{2}{3}$ и проч.

II. Если положимъ $a = \frac{1}{3}$, то предложенная дробь $\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$, а бесконечный рядъ, изображающій оную, будетъ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729} - \dots - \frac{1}{\infty}$, изъ котораго ежели возмется три члена, то сумма ихъ будетъ $= \frac{2}{3}$, меньше $\frac{1}{12}$ частію; а сумма 4 членовъ $\frac{20}{27}$ будетъ $\frac{1}{108}$ частію меньше $\frac{3}{4}$ и проч. Изъ сего видно, что при бесконечномъ числѣ членовъ, помянутой въ обоихъ случаяхъ недостатковъ уничтожится.

III. Дробь $\frac{1}{1+a}$ можно еще представить бесконечнымъ рядомъ и другимъ образомъ, когда 1 раздѣлится на $a+1$, какъ слѣдуетъ:

$(a+1) 1 * * * (\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} \text{ и проч. } - \dots - \frac{1}{a^\infty})$

$$\frac{1 + \frac{1}{a}}{a}$$

$$\begin{array}{r}
 -\frac{1}{a} \\
 -\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \\
 \hline
 +\frac{1}{a^2} \\
 \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \\
 \hline
 -\frac{1}{a^3} \\
 -\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \\
 \hline
 +\frac{1}{a^4} \\
 \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \\
 \hline
 -\frac{1}{a^5} \\
 -\frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} \\
 \hline
 +\frac{1}{a^6} \text{ и проч. } \dots \frac{1}{a^\infty}
 \end{array}$$

И такъ предложенная дробь $\frac{1}{a+1}$ равна слѣдующему ряду: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} \dots \frac{1}{a^\infty}$. Положимъ $a=1$, то будетъ сей рядъ $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ и проч. какъ и прежде. Еслижъ положимъ $a=2$, то выйдетъ сей рядъ $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ и проч.

IV. Равнымъ образомъ можно и дробь $\frac{c}{a+b}$ вообще, обратить въ безконечный рядъ, какъ слѣдуетъ:

$$(a+b)c \dots \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \text{ и проч.} \right)$$

$$\begin{array}{r}
 c + \frac{bc}{a} \\
 -\frac{bc}{a} \\
 \hline
 \frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2} \\
 \hline
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

+

$$\begin{array}{r}
 + \frac{b^2 c}{a^2} \\
 \frac{b^2 c}{a^2} + \frac{b^3 c}{a^3} \\
 \hline
 - \frac{b^3 c}{a^3} \\
 - \frac{b^3 c}{a^3} - \frac{b^4 c}{a^4} \\
 \hline
 + \frac{b^4 c}{a^4} \text{ и проч.}
 \end{array}$$

И такъ будетъ предложенная дробь $\frac{c}{a+b}$ равна слѣдующему ряду: $\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2 c}{a^3} - \frac{b^3 c}{a^4}$ и проч. бесконечно. Положимъ $a=2$, $b=4$ и $c=3$, то будетъ предложенная дробь $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{2+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$ и проч. Пустьъ будетъ $a=10$, $b=1$ и $c=1$, то будетъ дробь $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{10+1} = \frac{1}{11} = \frac{11}{11} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000} + \frac{1}{100000}$ и проч. изъ коихъ ежели возьмется 2 члена, то сумма ихъ $\frac{99}{100}$ будетъ $\frac{1}{100}$ ю меньше 1; естлижъ возьмется 3 члена, то сумма оныхъ $\frac{1001}{1000}$ будетъ $\frac{1}{1000}$ частію больше предложенной дроби и проч.

V. Такимъ же образомъ чрезъ непрестанное дѣленіе обращается въ бесконечной рядъ и такая дробь, у копорой дѣлитель, то есть знаменатель, изъ многихъ частей состоятъ будетъ, на примѣръ: ежели бы предложена была слѣдующая дробь: $\frac{1}{1-a+a^2}$, то бесконечной рядъ, равной сей предложенной дроби, сыскивается такимъ образомъ:

$$\begin{array}{r}
 (1-a+a^2) 1 * * * (1-a+a^3-a^4+a^6-a^7 \text{ и проч.} \\
 1-a+a^2 \\
 \hline
 +a-a^2 \\
 a-a^2+a^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -a^3 \\
 -a^3 + a^4 - a^5 \\
 \hline
 -a^4 + a^5 \\
 -a^4 + a^5 - a^6 \\
 \hline
 +a^5 \\
 +a^6 - a^7 + a^8 \\
 \hline
 +a^7 - a^8 \\
 a^7 - a^8 + a^9 \\
 \hline
 -a^9 \text{ и проч.}
 \end{array}$$

И такъ будетъ предложенная дробь $\frac{1}{1-a+a^2} = 1 + a - a^3 + a^4 - a^6 + a^7 - a^9 + a^{10} - a^{12} + a^{13} - a^{15} + a^{16} - a^{18} + a^{19} - a^{21} + a^{22} - a^{24} + a^{25} - a^{27} + a^{28} - a^{30} + a^{31} - a^{33} + a^{34} - a^{36} + a^{37} - a^{39} + a^{40} - a^{42} + a^{43} - a^{45} + a^{46} - a^{48} + a^{49} - a^{51} + a^{52} - a^{54} + a^{55} - a^{57} + a^{58} - a^{60} + a^{61} - a^{63} + a^{64} - a^{66} + a^{67} - a^{69} + a^{70} - a^{72} + a^{73} - a^{75} + a^{76} - a^{78} + a^{79} - a^{81} + a^{82} - a^{84} + a^{85} - a^{87} + a^{88} - a^{90} + a^{91} - a^{93} + a^{94} - a^{96} + a^{97} - a^{99} + a^{100} - a^{102} + a^{103} - a^{105} + a^{106} - a^{108} + a^{109} - a^{111} + a^{112} - a^{114} + a^{115} - a^{117} + a^{118} - a^{120} + a^{121} - a^{123} + a^{124} - a^{126} + a^{127} - a^{129} + a^{130} - a^{132} + a^{133} - a^{135} + a^{136} - a^{138} + a^{139} - a^{141} + a^{142} - a^{144} + a^{145} - a^{147} + a^{148} - a^{150} + a^{151} - a^{153} + a^{154} - a^{156} + a^{157} - a^{159} + a^{160} - a^{162} + a^{163} - a^{165} + a^{166} - a^{168} + a^{169} - a^{171} + a^{172} - a^{174} + a^{175} - a^{177} + a^{178} - a^{180} + a^{181} - a^{183} + a^{184} - a^{186} + a^{187} - a^{189} + a^{190} - a^{192} + a^{193} - a^{195} + a^{196} - a^{198} + a^{199} - a^{201} + a^{202} - a^{204} + a^{205} - a^{207} + a^{208} - a^{210} + a^{211} - a^{213} + a^{214} - a^{216} + a^{217} - a^{219} + a^{220} - a^{222} + a^{223} - a^{225} + a^{226} - a^{228} + a^{229} - a^{231} + a^{232} - a^{234} + a^{235} - a^{237} + a^{238} - a^{240} + a^{241} - a^{243} + a^{244} - a^{246} + a^{247} - a^{249} + a^{250} - a^{252} + a^{253} - a^{255} + a^{256} - a^{258} + a^{259} - a^{261} + a^{262} - a^{264} + a^{265} - a^{267} + a^{268} - a^{270} + a^{271} - a^{273} + a^{274} - a^{276} + a^{277} - a^{279} + a^{280} - a^{282} + a^{283} - a^{285} + a^{286} - a^{288} + a^{289} - a^{291} + a^{292} - a^{294} + a^{295} - a^{297} + a^{298} - a^{300} + a^{301} - a^{303} + a^{304} - a^{306} + a^{307} - a^{309} + a^{310} - a^{312} + a^{313} - a^{315} + a^{316} - a^{318} + a^{319} - a^{321} + a^{322} - a^{324} + a^{325} - a^{327} + a^{328} - a^{330} + a^{331} - a^{333} + a^{334} - a^{336} + a^{337} - a^{339} + a^{340} - a^{342} + a^{343} - a^{345} + a^{346} - a^{348} + a^{349} - a^{351} + a^{352} - a^{354} + a^{355} - a^{357} + a^{358} - a^{360} + a^{361} - a^{363} + a^{364} - a^{366} + a^{367} - a^{369} + a^{370} - a^{372} + a^{373} - a^{375} + a^{376} - a^{378} + a^{379} - a^{381} + a^{382} - a^{384} + a^{385} - a^{387} + a^{388} - a^{390} + a^{391} - a^{393} + a^{394} - a^{396} + a^{397} - a^{399} + a^{400} - a^{402} + a^{403} - a^{405} + a^{406} - a^{408} + a^{409} - a^{411} + a^{412} - a^{414} + a^{415} - a^{417} + a^{418} - a^{420} + a^{421} - a^{423} + a^{424} - a^{426} + a^{427} - a^{429} + a^{430} - a^{432} + a^{433} - a^{435} + a^{436} - a^{438} + a^{439} - a^{441} + a^{442} - a^{444} + a^{445} - a^{447} + a^{448} - a^{450} + a^{451} - a^{453} + a^{454} - a^{456} + a^{457} - a^{459} + a^{460} - a^{462} + a^{463} - a^{465} + a^{466} - a^{468} + a^{469} - a^{471} + a^{472} - a^{474} + a^{475} - a^{477} + a^{478} - a^{480} + a^{481} - a^{483} + a^{484} - a^{486} + a^{487} - a^{489} + a^{490} - a^{492} + a^{493} - a^{495} + a^{496} - a^{498} + a^{499} - a^{501} + a^{502} - a^{504} + a^{505} - a^{507} + a^{508} - a^{510} + a^{511} - a^{513} + a^{514} - a^{516} + a^{517} - a^{519} + a^{520} - a^{522} + a^{523} - a^{525} + a^{526} - a^{528} + a^{529} - a^{531} + a^{532} - a^{534} + a^{535} - a^{537} + a^{538} - a^{540} + a^{541} - a^{543} + a^{544} - a^{546} + a^{547} - a^{549} + a^{550} - a^{552} + a^{553} - a^{555} + a^{556} - a^{558} + a^{559} - a^{561} + a^{562} - a^{564} + a^{565} - a^{567} + a^{568} - a^{570} + a^{571} - a^{573} + a^{574} - a^{576} + a^{577} - a^{579} + a^{580} - a^{582} + a^{583} - a^{585} + a^{586} - a^{588} + a^{589} - a^{591} + a^{592} - a^{594} + a^{595} - a^{597} + a^{598} - a^{600} + a^{601} - a^{603} + a^{604} - a^{606} + a^{607} - a^{609} + a^{610} - a^{612} + a^{613} - a^{615} + a^{616} - a^{618} + a^{619} - a^{621} + a^{622} - a^{624} + a^{625} - a^{627} + a^{628} - a^{630} + a^{631} - a^{633} + a^{634} - a^{636} + a^{637} - a^{639} + a^{640} - a^{642} + a^{643} - a^{645} + a^{646} - a^{648} + a^{649} - a^{651} + a^{652} - a^{654} + a^{655} - a^{657} + a^{658} - a^{660} + a^{661} - a^{663} + a^{664} - a^{666} + a^{667} - a^{669} + a^{670} - a^{672} + a^{673} - a^{675} + a^{676} - a^{678} + a^{679} - a^{681} + a^{682} - a^{684} + a^{685} - a^{687} + a^{688} - a^{690} + a^{691} - a^{693} + a^{694} - a^{696} + a^{697} - a^{699} + a^{700} - a^{702} + a^{703} - a^{705} + a^{706} - a^{708} + a^{709} - a^{711} + a^{712} - a^{714} + a^{715} - a^{717} + a^{718} - a^{720} + a^{721} - a^{723} + a^{724} - a^{726} + a^{727} - a^{729} + a^{730} - a^{732} + a^{733} - a^{735} + a^{736} - a^{738} + a^{739} - a^{741} + a^{742} - a^{744} + a^{745} - a^{747} + a^{748} - a^{750} + a^{751} - a^{753} + a^{754} - a^{756} + a^{757} - a^{759} + a^{760} - a^{762} + a^{763} - a^{765} + a^{766} - a^{768} + a^{769} - a^{771} + a^{772} - a^{774} + a^{775} - a^{777} + a^{778} - a^{780} + a^{781} - a^{783} + a^{784} - a^{786} + a^{787} - a^{789} + a^{790} - a^{792} + a^{793} - a^{795} + a^{796} - a^{798} + a^{799} - a^{801} + a^{802} - a^{804} + a^{805} - a^{807} + a^{808} - a^{810} + a^{811} - a^{813} + a^{814} - a^{816} + a^{817} - a^{819} + a^{820} - a^{822} + a^{823} - a^{825} + a^{826} - a^{828} + a^{829} - a^{831} + a^{832} - a^{834} + a^{835} - a^{837} + a^{838} - a^{840} + a^{841} - a^{843} + a^{844} - a^{846} + a^{847} - a^{849} + a^{850} - a^{852} + a^{853} - a^{855} + a^{856} - a^{858} + a^{859} - a^{861} + a^{862} - a^{864} + a^{865} - a^{867} + a^{868} - a^{870} + a^{871} - a^{873} + a^{874} - a^{876} + a^{877} - a^{879} + a^{880} - a^{882} + a^{883} - a^{885} + a^{886} - a^{888} + a^{889} - a^{891} + a^{892} - a^{894} + a^{895} - a^{897} + a^{898} - a^{900} + a^{901} - a^{903} + a^{904} - a^{906} + a^{907} - a^{909} + a^{910} - a^{912} + a^{913} - a^{915} + a^{916} - a^{918} + a^{919} - a^{921} + a^{922} - a^{924} + a^{925} - a^{927} + a^{928} - a^{930} + a^{931} - a^{933} + a^{934} - a^{936} + a^{937} - a^{939} + a^{940} - a^{942} + a^{943} - a^{945} + a^{946} - a^{948} + a^{949} - a^{951} + a^{952} - a^{954} + a^{955} - a^{957} + a^{958} - a^{960} + a^{961} - a^{963} + a^{964} - a^{966} + a^{967} - a^{969} + a^{970} - a^{972} + a^{973} - a^{975} + a^{976} - a^{978} + a^{979} - a^{981} + a^{982} - a^{984} + a^{985} - a^{987} + a^{988} - a^{990} + a^{991} - a^{993} + a^{994} - a^{996} + a^{997} - a^{999} + a^{1000} - a^{1002} + a^{1003} - a^{1005} + a^{1006} - a^{1008} + a^{1009} - a^{1011} + a^{1012} - a^{1014} + a^{1015} - a^{1017} + a^{1018} - a^{1020} + a^{1021} - a^{1023} + a^{1024} - a^{1026} + a^{1027} - a^{1029} + a^{1030} - a^{1032} + a^{1033} - a^{1035} + a^{1036} - a^{1038} + a^{1039} - a^{1041} + a^{1042} - a^{1044} + a^{1045} - a^{1047} + a^{1048} - a^{1050} + a^{1051} - a^{1053} + a^{1054} - a^{1056} + a^{1057} - a^{1059} + a^{1060} - a^{1062} + a^{1063} - a^{1065} + a^{1066} - a^{1068} + a^{1069} - a^{1071} + a^{1072} - a^{1074} + a^{1075} - a^{1077} + a^{1078} - a^{1080} + a^{1081} - a^{1083} + a^{1084} - a^{1086} + a^{1087} - a^{1089} + a^{1090} - a^{1092} + a^{1093} - a^{1095} + a^{1096} - a^{1098} + a^{1099} - a^{1101} + a^{1102} - a^{1104} + a^{1105} - a^{1107} + a^{1108} - a^{1110} + a^{1111} - a^{1113} + a^{1114} - a^{1116} + a^{1117} - a^{1119} + a^{1120} - a^{1122} + a^{1123} - a^{1125} + a^{1126} - a^{1128} + a^{1129} - a^{1131} + a^{1132} - a^{1134} + a^{1135} - a^{1137} + a^{1138} - a^{1140} + a^{1141} - a^{1143} + a^{1144} - a^{1146} + a^{1147} - a^{1149} + a^{1150} - a^{1152} + a^{1153} - a^{1155} + a^{1156} - a^{1158} + a^{1159} - a^{1161} + a^{1162} - a^{1164} + a^{1165} - a^{1167} + a^{1168} - a^{1170} + a^{1171} - a^{1173} + a^{1174} - a^{1176} + a^{1177} - a^{1179} + a^{1180} - a^{1182} + a^{1183} - a^{1185} + a^{1186} - a^{1188} + a^{1189} - a^{1191} + a^{1192} - a^{1194} + a^{1195} - a^{1197} + a^{1198} - a^{1200} + a^{1201} - a^{1203} + a^{1204} - a^{1206} + a^{1207} - a^{1209} + a^{1210} - a^{1212} + a^{1213} - a^{1215} + a^{1216} - a^{1218} + a^{1219} - a^{1221} + a^{1222} - a^{1224} + a^{1225} - a^{1227} + a^{1228} - a^{1230} + a^{1231} - a^{1233} + a^{1234} - a^{1236} + a^{1237} - a^{1239} + a^{1240} - a^{1242} + a^{1243} - a^{1245} + a^{1246} - a^{1248} + a^{1249} - a^{1251} + a^{1252} - a^{1254} + a^{1255} - a^{1257} + a^{1258} - a^{1260} + a^{1261} - a^{1263} + a^{1264} - a^{1266} + a^{1267} - a^{1269} + a^{1270} - a^{1272} + a^{1273} - a^{1275} + a^{1276} - a^{1278} + a^{1279} - a^{1281} + a^{1282} - a^{1284} + a^{1285} - a^{1287} + a^{1288} - a^{1290} + a^{1291} - a^{1293} + a^{1294} - a^{1296} + a^{1297} - a^{1299} + a^{1300} - a^{1302} + a^{1303} - a^{1305} + a^{1306} - a^{1308} + a^{1309} - a^{1311} + a^{1312} - a^{1314} + a^{1315} - a^{1317} + a^{1318} - a^{1320} + a^{1321} - a^{1323} + a^{1324} - a^{1326} + a^{1327} - a^{1329} + a^{1330} - a^{1332} + a^{1333} - a^{1335} + a^{1336} - a^{1338} + a^{1339} - a^{1341} + a^{1342} - a^{1344} + a^{1345} - a^{1347} + a^{1348} - a^{1350} + a^{1351} - a^{1353} + a^{1354} - a^{1356} + a^{1357} - a^{1359} + a^{1360} - a^{1362} + a^{1363} - a^{1365} + a^{1366} - a^{1368} + a^{1369} - a^{1371} + a^{1372} - a^{1374} + a^{1375} - a^{1377} + a^{1378} - a^{1380} + a^{1381} - a^{1383} + a^{1384} - a^{1386} + a^{1387} - a^{1389} + a^{1390} - a^{1392} + a^{1393} - a^{1395} + a^{1396} - a^{1398} + a^{1399} - a^{1401} + a^{1402} - a^{1404} + a^{1405} - a^{1407} + a^{1408} - a^{1410} + a^{1411} - a^{1413} + a^{1414} - a^{1416} + a^{1417} - a^{1419} + a^{1420} - a^{1422} + a^{1423} - a^{1425} + a^{1426} - a^{1428} + a^{1429} - a^{1431} + a^{1432} - a^{1434} + a^{1435} - a^{1437} + a^{1438} - a^{1440} + a^{1441} - a^{1443} + a^{1444} - a^{1446} + a^{1447} - a^{1449} + a^{1450} - a^{1452} + a^{1453} - a^{1455} + a^{1456} - a^{1458} + a^{1459} - a^{1461} + a^{1462} - a^{1464} + a^{1465} - a^{1467} + a^{1468} - a^{1470} + a^{1471} - a^{1473} + a^{1474} - a^{1476} + a^{1477} - a^{1479} + a^{1480} - a^{1482} + a^{1483} - a^{1485} + a^{1486} - a^{1488} + a^{1489} - a^{1491} + a^{1492} - a^{1494} + a^{1495} - a^{1497} + a^{1498} - a^{1500} + a^{1501} - a^{1503} + a^{1504} - a^{1506} + a^{1507} - a^{1509} + a^{1510} - a^{1512} + a^{1513} - a^{1515} + a^{1516} - a^{1518} + a^{1519} - a^{1521} + a^{1522} - a^{1524} + a^{1525} - a^{1527} + a^{1528} - a^{1530} + a^{1531} - a^{1533} + a^{1534} - a^{1536} + a^{1537} - a^{1539} + a^{1540} - a^{1542} + a^{1543} - a^{1545} + a^{1546} - a^{1548} + a^{1549} - a^{1551} + a^{1552} - a^{1554} + a^{1555} - a^{1557} + a^{1558} - a^{1560} + a^{1561} - a^{1563} + a^{1564} - a^{1566} + a^{1567} - a^{1569} + a^{1570} - a^{1572} + a^{1573} - a^{1575} + a^{1576} - a^{1578} + a^{1579} - a^{1581} + a^{1582} - a^{1584} + a^{1585} - a^{1587} + a^{1588} - a^{1590} + a^{1591} - a^{1593} + a^{1594} - a^{1596} + a^{1597} - a^{1599} + a^{1600} - a^{1602} + a^{1603} - a^{1605} + a^{1606} - a^{1608} + a^{1609} - a^{1611} + a^{1612} - a^{1614} + a^{1615} - a^{1617} + a^{1618} - a^{1620} + a^{1621} - a^{1623} + a^{1624} - a^{1626} + a^{1627} - a^{1629} + a^{1630} - a^{1632} + a^{1633} - a^{1635} + a^{1636} - a^{1638} + a^{1639} - a^{1641} + a^{1642} - a^{1644} + a^{1645} - a^{1647} + a^{1648} - a^{1650} + a^{1651} - a^{1653} + a^{1654} - a^{1656} + a^{1657} - a^{1659} + a^{1660} - a^{1662} + a^{1663} - a^{1665} + a^{1666} - a^{1668} + a^{1669} - a^{1671} + a^{1672} - a^{1674} + a^{1675} - a^{1677} + a^{1678} - a^{1680} + a^{1681} - a^{1683} + a^{1684} - a^{1686} + a^{1687} - a^{1689} + a^{1690} - a^{1692} + a^{1693} - a^{1695} + a^{1696} - a^{1698} + a^{1699} - a^{1701} + a^{1702} - a^{1704} + a^{1705} - a^{1707} + a^{1708} - a^{1710} + a^{1711} - a^{1713} + a^{1714} - a^{1716} + a^{1717} - a^{1719} + a^{1720} - a^{1722} + a^{1723} - a^{1725} + a^{1726} - a^{1728} + a^{1729} - a^{1731} + a^{1732} - a^{1734} + a^{1735} - a^{1737} + a^{1738} - a^{1740} + a^{1741} - a^{1743} + a^{1744} - a^{1746} + a^{1747} - a^{1749} + a^{1750} - a^{1752} + a^{1753} - a^{1755} + a^{1756} - a^{1758} + a^{1759} - a^{1761} + a^{1762} - a^{1764} + a^{1765} - a^{1767} + a^{1768} - a^{1770} + a^{1771} - a^{1773} + a^{1774} - a^{1776} + a^{1777} - a^{1779} + a^{1780} - a^{1782} + a^{1783} - a^{1785} + a^{1786} - a^{1788} + a^{1789} - a^{1791} + a^{1792} - a^{1794} + a^{1795} - a^{1797} + a^{1798} - a^{1800} + a^{1801} - a^{1803} + a^{1804} - a^{1806} + a^{1807} - a^{1809} + a^{1810} - a^{1812} + a^{1813} - a^{1815} + a^{1816} - a^{1818} + a^{1819} - a^{1821} + a^{1822} - a^{1824} + a^{1825} - a^{1827} + a^{1828} - a^{1830} + a^{1831} - a^{1833} + a^{1834} - a^{1836} + a^{1837} - a^{1839} + a^{1840} - a^{1842} + a^{1843} - a^{1845} + a^{1846} - a^{1848} + a^{1849} - a^{1851} + a^{1852} - a^{1854} + a^{1855} - a^{1857} + a^{1858} - a^{1860} + a^{1861} - a^{1863} + a^{1864} - a^{1866} + a^{1867} - a^{1869} + a^{1870} - a^{1872} + a^{1873} - a^{1875} + a^{1876} - a^{1878} + a^{1879} - a^{1881} + a^{1882} - a^{1884} + a^{1885} - a^{1887} + a^{1888} - a^{1890} + a^{1891} - a^{1893} + a^{1894} - a^{1896} + a^{1897} - a^{1899} + a^{1900} - a^{1902} + a^{1903} - a^{1905} + a^{1906} - a^{1908} + a^{1909} - a^{1911} + a^{1912} - a^{1914} + a^{1915} - a^{1917} + a^{1918} - a^{1920} + a^{1921} - a^{1923} + a^{1924} - a^{1926} + a^{1927} - a^{1929} + a^{1930} - a^{1932} + a^{1933} - a^{1935} + a^{1936} - a^{1938} + a^{1939} - a^{1941} + a^{1942} - a^{1944} + a^{1945} - a^{1947} + a^{1948} - a^{1950} + a^{1951} - a^{1953} + a^{1954} - a^{1956} + a^{1957} - a^{1959} + a^{1960} - a^{1962} + a^{1963} - a^{1965} + a^{1966} - a^{1968} + a^{1969} - a^{1971} + a^{1972} - a^{1974} + a^{1975} - a^{1977} + a^{1978} - a^{1980} + a^{1981} - a^{1983} + a^{1984} - a^{1986} + a^{1987} - a^{1989} + a^{1990} - a^{1992} + a^{1993} - a^{1995} + a^{1996} - a^{1998} + a^{1999} - a^{2001} + a^{2002} - a^{2004} + a^{2005} - a^{2007} + a^{2008} - a^{2010} + a^{2011} - a^{2013} + a^{2014} - a^{2016} + a^{2017} - a^{2019} + a^{2020} - a^{2022} + a^{2023} - a^{2025} + a^{2026} - a^{2028} + a^{2029} - a^{2031} + a^{2032} - a^{2034} + a^{2035} - a^{2037} + a^{2038} - a^{2040} + a^{2041} - a^{2043} + a^{2044} - a^{2046} + a^{2047} - a^{2049} + a^{2050} - a^{2052} + a^{2053} - a^{2055} + a^{2056} - a^{2058} + a^{2059} - a^{2061} + a^{2062} - a^{2064} + a^{2065} - a^{2067} + a^{2068} - a^{2070} + a^{2071} - a^{2073} + a^{2074} - a^{2076} + a^{2077} - a^{2079} + a^{2080} - a^{2082} + a^{2083} - a^{2085} + a^{2086} - a^{2088} + a^{2089} - a^{2091} + a^{2092} - a^{2094} + a^{2095} - a^{2097} + a^{2098} - a^{2100} + a^{2101} - a^{2103} + a^{2104} - a^{2106} + a^{2107} - a^{2109} + a^{2110} - a^{2112} + a^{2113} - a^{2115} + a^{2116} - a^{2118} + a^{2119} - a^{2121} + a^{2122} - a^{2124} + a^{2125} - a^{2127} + a^{2128} - a^{2130} + a^{2131} - a^{2133} + a^{2134} - a^{2136} + a^{2137} - a^{2139} + a^{2140} - a^{2142} + a^{2143} - a^{2145} + a^{2146} - a^{2148} + a^{2149} - a^{2151} + a^{2152} - a^{2154} + a^{2155} - a^{2157} + a^{2158} - a^{2160} + a^{2161} - a^{2163} + a^{2164} - a^{2166} + a^{2167} - a^{2169} + a^{2170} - a^{2172} + a^{2173} - a^{2175} + a^{2176} - a^{2178} + a^{2179} - a^{2181} + a^{2182} - a^{2184} + a^{2185} - a^{2187} + a^{2188} - a^{2190} + a^{2191} - a^{2193} + a^{2194} - a^{2196} + a^{2197} - a^{2199} + a^{2200} - a^{2202} + a^{2203} - a^{2205} + a^{2206} - a^{2208} + a^{2209} - a^{2211} + a^{2212} - a^{2214} + a^{2215} - a^{2217} + a^{2218} - a^{2220} + a^{2221} - a^{2223} + a^{2224} - a^{2226} + a^{2227} - a^{2229} + a^{2230} - a^{2232} + a^{2233} - a^{2235} + a^{2236} - a^{2238} + a^{2239} - a^{2241} + a^{2242} - a^{2244} + a^{2245} - a^{2247} + a^{2248} - a^{2250} + a^{2251} - a^{2253} + a^{2254} - a^{2256} + a^{2257} - a^{2259} + a^{2260} - a^{2262} + a^{2263} - a^{2265} + a^{2266} - a^{2268} + a^{2269} - a^{2271} + a^{2272} - a^{2274} + a^{2275} - a^{2277} + a^{2278} - a^{2280} + a^{2281} - a^{2283} + a^{2284} - a^{2286} + a^{2287} - a^{2289} + a^{2290} - a^{2292} + a^{2293} - a^{2295} + a^{2296} - a^{2298} + a^{2299} - a^{2301} + a^{2302} - a^{2304} + a^{2305} - a^{2307} + a^{2308} - a^{2310} + a^{2311} - a^{2313} + a^{2314} - a^{2316} + a^{2317} - a^{2319} + a^{2320} - a^{2322} + a^{2323} - a^{2325} + a^{2326} - a^{2328} + a^{2329} - a^{2331} + a^{2332} - a^{2334} + a^{2335} - a^{2337} + a^{2338} - a^{2340} + a^{2341} - a^{2343} + a^{2344} - a^{2346} + a^{2347} - a^{2349} + a^{2350} - a^{2352} + a^{2353} - a^{2355} + a^{2356} - a^{2358} + a^{2359} - a^{2361} + a^{2362} - a^{2364} + a^{2365} - a^{2367} + a^{2368} - a^{2370} + a^{2371} - a^{2373} + a^{2374} - a^{2376} + a^{2377} - a^{2379} + a^{2380} - a^{2382} + a^{2383} - a^{2385} + a^{2386} - a^{2388} + a^{2389} - a^{2391} + a^{2392} - a^{2394} + a^{2395} - a^{2397} + a^{2398} - a^{2400} + a^{2401} - a^{2403} + a^{2$

Примѣчан. Показаннымъ образомъ можно всѣ дроби обращать въ безконечные ряды, что не только часто приноситъ великую пользу, но и само по себѣ важно: поелику безконечной рядъ, не смотря на то, что никогда не пресѣчется, но еще и опредѣленное знаменованіе имѣть можетъ. Изъ сего основанія выведены важнѣйшія изобрѣтенія, чего ради сіе свойство дробей заслуживаетъ разсмотрѣніе съ большимъ вниманіемъ.

О различныхъ изображеніяхъ величинъ съ отрицательными показателями.

§ 53 Теоремы. Іа. Величина a^{-1} будетъ $= \frac{1}{a}$; ибо $\frac{a}{a^1} = a^{1-1} = a^{-1}$ (§ 26 и 27), также $\frac{a}{a^1} = \frac{1}{a}$ (§ 35), по сему $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (Част. I. § 30). Также и $z^{-1} = \frac{1}{z}$; ибо $\frac{z}{z^1} = z^{-1}$, и $\frac{z}{z^1} = \frac{1}{z}$ (§ 35); слѣдовательно $z^{-1} = \frac{1}{z}$, и вообще $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Іи я. величина $\frac{a^2}{b^{-1}}$ будетъ $= a^2 b$; ибо $\frac{a^2}{b^{-1}} = a^2 : b^{-1}$; но $b^{-1} = \frac{1}{b}$; по сему $a^2 : b^{-1} = a^2 : \frac{1}{b} = a^2 b$, слѣдовательно и $\frac{a^2}{b^{-1}} = a^2 b$.

§ 54. Слѣдств. Іе. Изъ сего видно, что всякую величину отрицательной степени можно изобразить положительною степенью, на примѣръ: $\frac{b^2 c^{-3}}{a^{-2}}$ будетъ $= \frac{b^2 a^2}{c^3}$; ибо $\frac{b^2 c^{-3}}{a^{-2}} = b^2 \frac{c^{-3}}{a^{-2}}$; $\frac{1}{a^2} = \frac{b^2}{c^3} : \frac{1}{a^2} = \frac{b^2 a^2}{c^3}$ (§ 45); и вообще $\frac{b^2}{a^{-n}} = a^n b^2$.

Равнымъ образомъ и величина $\frac{a^2 b^{-3}}{c^{-2}}$ будетъ $= \frac{a^2 n^2}{b^3 c} = \frac{c^{-1} b^{-3}}{a^{-2} n^{-2}}$; ибо по предъидущему предложе-

нію

нію $\frac{a^2 x^{-3}}{c n^{-2}} = \frac{a^2 n^2}{x^3 c}$, также и $\frac{c^{-1} x^{-3}}{a^{-2} n^{-2}} = (\frac{1}{c} \times \frac{1}{x^3}) :$

$(\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{c x^3} : \frac{1}{a^2 n^2} = \frac{a^2 n^2}{x^3 c}$ (9 45), слѣдова-

тельно и $\frac{a^2 x^{-3}}{c n^{-2}} = \frac{c^{-1} x^{-3}}{a^{-2} n^{-2}}$.

Слѣдств. 2. Изъ сего явствуетъ, что и
обратно всякую величину положительной сте-
пени можно изобразить отрицательною сте-
пеню.

Примѣч. Изъ вышеписанныхъ предложеній ясно
видно, что величины положительной степени,
переставляюся изъ числителя на мѣсто зна-
менателя, а изъ знаменателя на мѣсто числи-
теля съ отрицательными показателями; и
обратно величины отрицательной степени при
переставкѣ такимъ же образомъ, превращаюся
въ положительную степень, какъ-то изъ по-
слѣдняго примѣра видно.

О Изображеніи степеней простыхъ и слож- ныхъ количествъ.

§ 55. **Опредѣлен.** Предъ симъ уже показано,
что первую степенью называется всякое коли-
чество, само себя означающее, на примѣръ: пер-
вая степень количества a есть то же a ; вторая
степень величины a , или Произведеніе a чрезъ a ,
есть $a \times a = a^1 \times a^1 = a^{1 \times 2} = a^2 = aa$; также
вторая степень количества $a^3 = a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3 \times 2}$;
третья степень количества $a = a \times a \times a =$

Г

а³

$a' \times a' \times a' = a'^{\times 3} = a^3$. Четвертая степень количества $a = a \times a \times a \times a = a'^{\times 4} = a^4$, и такъ далѣе. Во всѣхъ сихъ степеняхъ величина a именуется корень той степени, которую она производитъ, какъ-то: a есть корень второй степени отъ a^2 , корень третьей степени отъ a^3 и проч.

§ 56. Слѣдств. Изъ сего видно, 1) что степень количества a не что иное, какъ нѣсколько разъ повторенное того же количества самаго на себя умноженіе. 2.) Число таковыхъ умноженій единицею меньше показателя степени. 3.) При возвышеніи какого нибудь количества въ данную степень, показатель данной величины умножается показателемъ пребуемой степени, на примѣръ: третья степень количества $a^2 = a^{2 \times 3} = a^6 = a^2 \times a^2 \times a^2$; по сей причинѣ для возвышенія $a = a^1$ въ степень m , должно умножить только показателя 1 количества a показателемъ степени m , будетъ пребуемая степень $a^{1 \times m} = a^m$, (такая степень именуется неопредѣленною); также для возвышенія количества a^2 въ степень r , умножь показателя n чрезъ r , будетъ имѣть желанную степень a^{nr} и проч.

§. 57. Опредѣл. Вторая степень какой нибудь величины именуется квадратъ; а третья степень называется кубъ, на примѣръ: a^2 есть квадратъ количества a ; a^3 есть кубъ того же количества a . Дабы найти квадратъ какого нибудь числа, то должно умножить оное самимъ собою одинъ разъ, на примѣръ: квадратъ
числа

числа 5 будетъ $= 5 \times 5 = 25$; а когда сей квадратъ 25 умножится еще одинъ разъ чрезъ свой корень 5, то произведение $25 \times 5 = 125$ будетъ кубъ числа 5.

И такъ квадраты и кубы простыхъ чиселъ отъ единицы до десяти будутъ слѣдующіе:

Числа. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
 квадраты. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
 кубы. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000

§ 58. Дабы изобразить различныя степени данныхъ дробей, то вторая степень дроби $\frac{a}{b}$ найдется, когда числитель и знаменатель возвышены будутъ во вторую степень, то есть

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}; \text{ третья степень дроби } \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}; \text{ так-}$$

же третья степень дроби $\frac{2b^2}{3c}$ будетъ $\left(\frac{2b^2}{3c}\right)^3$,

$$= \frac{2 \times 2 \times 2b^{2 \times 3}}{3 \times 3 \times 3c^{1 \times 3}} = \frac{8b^6}{27c^3}.$$

Четвертая степень дроби $\frac{5}{7}$ будетъ $\left(\frac{5}{7}\right)^4 =$
 $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{625}{2401}$. Пятая степень дроби $\frac{a^2bc^3}{d^2}$ бу-

$$\text{детъ} = \left(\frac{a^2bc^3}{d^2}\right)^5 = \frac{a^{2 \times 5}b^{1 \times 5}c^{3 \times 5}}{d^{2 \times 5}} = \frac{a^{10}b^5c^{15}}{d^{10}}. \text{ Сте-}$$

пень $\frac{1}{2}n$, количества $\frac{b^3}{a^2}$, будетъ $= \frac{b^{\frac{3n}{2}}}{a^n}$ и проч.

§ 59. Задача. Сложную положишельную величину $a + b$ возвысить во вторую, третью и дальѣ степенъ.

Рѣшен. Сложное количество возвышается въ какую нибудь степень, также какъ и простое, чрезъ умноженіе столько разъ самаго на себя, сколь великъ показатель степени безъ единицы; и такъ, дабы найти вторую степень величины $a + b$, то умножь $a + b$ чрезъ $a + b$, получишь вторую степень величины $a + b$, которая обыкновенно означается чрезъ $\overline{a+b}^2$ или $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

Третья степень или кубъ величины $a + b$ будетъ $= \overline{a+b}^3$ или $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Четвертая степень количества $a + b$ будетъ $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Пятая степень величины $a + b = (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, и проч.

Примѣч. I Изъ сего удобно можно видѣть, что число членовъ каждой степени величины $a + b$ единицею больше показателя той же степени; предстоящее втораго члена равно показателю перваго члена; показатель той же величины во второмъ членѣ единицею меньше показателя перваго члена; а въ третьемъ членѣ показатель той же величины единицею меньше показателя втораго члена, и такъ дальѣ. Показатель же послѣдняго члена второй величи-

ны b равенъ показателю степени, а показателя той же величины прочихъ членовъ, къ левой рукѣ одинъ послѣ другаго слѣдующихъ, единицею уменьшаются.

Примѣч. 2. Изъ того же видно, ежели показатели второй величины b поставятся подъ показателями первого количества a , и чрезъ то составятся дроби, на примѣръ: показатели изъ пятой степени $\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$, то первая дробь $\frac{5}{1}$ будетъ предстоящее втораго члена; произведение двухъ дробей $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} = 10$ предстоящее третьяго члена; произведение трехъ дробей $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 10$, предстоящее четвертаго члена, $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 5$ предстоящее 5 го члена, и наконецъ $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5} = 1$ будетъ предстоящее послѣдняго члена.

§ 60. **Задача.** Величину $a + b$ или $a - b$ (*) возвысить въ седьмую степень.

Рѣшен. Поелику число членовъ требуемой степени должно быть единицею больше показателя степени, то есть 8 (§ 59. Прим. 1.), по сей причинѣ, написавши помянутые данные члены съ ихъ показателями одинъ подъ другаго слѣдующимъ образомъ: умножь противуположные

$a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$	члены между собой, будетъ
$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7$	

$a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7 = (a + b)^7$ безъ

Г 3 пред-

*) Два такія количества для краткости вообще означаются иногда такъ: $a \pm b$, при чемъ и выговаривается: величина a плюсъ b или минусъ b , то есть a съ b или a безъ b .

предстоящихъ; а чѣмбѣ найѣи предстоящее всякаго члена, то поспавя показателей вѣторой величины b подѣ показателями первой a , то естѣ $\frac{7}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7}$, будетѣ $\frac{7}{1} = 7$ предстоящее вѣторого члена, $\frac{7}{1} \times \frac{6}{2} = 21$ предстоящее третѣяго члена, $21 \times \frac{5}{3} = 35$ предстоящее четѣвертаго члена, $35 \times \frac{4}{4} = 35$ предстоящее пѣятаго члена, $35 \times \frac{3}{5} = 21$ предстоящее шестѣаго члена, $21 \times \frac{2}{6} = 7$ предстоящее седѣьмаго члена, $7 \times \frac{1}{7} = 1$ предстоящее послѣдняго члена; потомѣ каждое изѣ сихѣ предстоящее приписавши къ прежде найденнымѣ членамѣ, получишь преѣбуемую степень величины $a \pm b = (a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$.

§ 61. Задача. Величину $a - b$ возвыситѣ въ восьмую степень.

Рѣшен. Разположа данныя члены сего количества и сыскавши къ нимѣ предстоящихѣ, какѣ въ предѣбидущей задачѣ показано, поспавь предѣ вѣторымѣ, четѣвертымѣ, шестымѣ и восьмымѣ членомѣ знакѣ $-$, получишь преѣбуемую степень величины $a - b = (a - b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

Примѣч. Изѣ двухѣ предѣбидущихѣ задачѣ удобно можно видѣть, что въ степеняхѣ чѣтнато числа, какѣ на примѣрѣ, восьмой степени, самое большее предстоящее количество 70 будетѣ у средняго члена, а прочѣе оѣтъ него къ правой рукѣ уменьшаются въ такомѣ же порядкѣ какѣ и къ лѣвой. Въ степеняхѣ же не чѣтнато числа, на примѣрѣ 7 й степени, самыя большѣя и равныя предстоящѣя будутѣ у двухѣ среднихѣ, а прочѣя оѣтъ нихѣ къ правой рукѣ уменьшаются въ такомѣ же порядкѣ, какѣ и къ лѣвой. По сей причинѣ, при возвышенѣи въ какуюнибудь степень двучастнаго количества, надлежитѣ находѣть предстоящѣя только до средняго члена, а къ проѣдѣ

чимъ величинамъ, къ правой рукѣ слѣдующимъ, припи-
сать оныя въ такомъ же порядкѣ, въ какомъ они нахо-
дятся къ лѣвой рукѣ.

§ 62. Задача. Величину $a + b$ возвысить въ
неопредѣленную степень.

Рѣшен. Напиши рядъ изъ первого члена a , въ которомъ бы первой членъ былъ a^n , а прочіе члены поставь съ показателями, одинъ другаго единицею уменьшенными, гдѣ послѣдній членъ будещъ не имѣющій степени возвышенія $= a^{n-n} = a^0 = 1$ (§ 59. Примѣч. I. и § 27.); подъ симъ рядомъ, начиная единицею, напиши другой рядъ количества b съ показателями, одинъ другаго единицею превышающими; попомъ умножь ихъ между собою, какъ слѣдуетъ:

$$a^n, a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, a^{n-4}, a^{n-5} \dots a^{n-n} = a^0 = 1$$

$$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5 \dots b^n$$

$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, a^{n-4}b^4, a^{n-5}b^5 \dots a^0b^n = b^n$
 = суммѣ всѣхъ членовъ безъ предстоящихъ; но дабы къ сему ряду членовъ найпи предстоящихъ, то принявъ показателей буквы a за числителей, а показателей буквы b за знаменателей, изобрази оныя дробью, какъ въ (960) показано, то естъ $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{4}, \frac{n-4}{5}$ и проч.

изъ коихъ будетъ $\frac{n}{1}$ предстоящее втораго члена,

$\frac{n}{1} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)$ предстоящее претяго члена, $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$

предстоящее четвертого члена, $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4}$

предсходящее 5-го члена и прочая бесконечно, най-

дѣтся неопредѣленная степень величины $a+b$

$$= (a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) a^{n-2} \cdot b^2$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) a^{n-3} \cdot b^3 + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot$$

$$\left(\frac{n-3}{4}\right) a^{n-4} \cdot b^4 \text{ и проч. безконечно, гдѣ послѣд-}$$

ній членъ будетъ $a^0 b^n = b^n$.

Доказат. Дабы увѣриться, что въ сей степе-
 ни послѣдній членъ будетъ $= b^n$, положимъ
 $n=5$, то будетъ послѣдній членъ $= a^{n-5} b^n$
 $= b^n = \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{n-4}{5}\right) a^{n-5} b^n = \frac{5}{1} \cdot \left(\frac{5-1}{2}\right) \cdot$
 $\left(\frac{5-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{5-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{5-4}{5}\right) a^{5-5} \cdot b^n = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} a^0 b^n = 1 \cdot a^0 b^n = b^n$.

§ 63. Прибавлен. Сію неокончаемую степень
 величины $a+b$ можно, не перемѣняя ея величины,
 представить въ другомъ видѣ; ибо извѣстно,
 что $a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3}$ и проч. (§ 27);

того ради, поставя каждое изъ сихъ предложенныхъ
 величинъ на мѣсто равныхъ количествъ, будетъ
 помянутая степень величины $a+b = (a+b)^n$

$$= a^n + \frac{n}{1} \cdot \frac{a^n b}{a} + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{a^n b^2}{a^2} + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot$$

$$\frac{a^n b^3}{a^3} + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{4}\right) \cdot \frac{a^n b^4}{a^4} + \dots \dots b^n =$$

$$a^n \left(1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{b^2}{a^2} + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot \frac{b^3}{a^3} + \right.$$

$$\left. \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{4}\right) \frac{b^4}{a^4} + \text{и проч.} \dots \right)$$

§ 64. Слѣдств. Изъ сего видно, что сыскавши предстоящія какой нибудь степени, (изъ коихъ предстоящее перваго члена всегда будетъ 1) надлежитъ умножить впорое предстоящее и всѣ послѣдующія по немъ первую степень величины $\frac{b}{a}$; потомъ третій членъ и послѣдующіе по немъ чрезъ ту же первую степень $\frac{b}{a}$; подобнымъ образомъ, начиная съ четвертаго даже до послѣдняго, умножь всѣ члены тую же величиною $\frac{b}{a}$ и такъ далѣе; а на конецъ всѣ оныя члены умножь высшею степенью a^n , чрезъ что найдется требуемая степень n всякой двучаспной величины, на примѣръ: степень n величины $a^3 + b^2$ легко сыскашся можетъ, естли только найденныя предстоящія, вмѣсто $\frac{b}{a}$ умножатся показаннымъ образомъ чрезъ $\frac{b^2}{a^3}$, а напослѣдокъ всѣ члены умножатся чрезъ a^{3n} , какъ слѣдуетъ

$$a^{3n} \left(1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{b^2}{a^3} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b^4}{a^6} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{b^6}{a^9} + \dots \right)$$

§ 65. Слѣдствіе II. Посредствомъ сего общаго степеней двучаспнаго количества изобразенія, легко можно всякое количество возвысити въ желаемую степень, на примѣръ: положимъ, что требуется третья степень величины $x + a^2$, то найдя предстоящія, какъ въ § 59, Примѣч. 2 мѣ показано, кои будутъ

$1, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ умножь, какъ въ предъидущемъ слѣд-
ствіи предписано, чрезъ $\frac{a^2}{x}$, будетъ $(x + a^2)^3$

$$= x^3 \left(1 + \frac{3a^2}{x} + \frac{3a^4}{x^2} + \frac{a^6}{x^3} \right) = x^3 + 3x^2a^2 + 3xa^4 + a^6$$

(§ 41. слѣд.) Тожъ должно разумѣть и о
прочихъ степеняхъ двучастнаго количества.

§ 66. *Задача.* Трехчастное количество $c+d+h$
возвыситъ во вторую степень.

Рѣшен. Сперва по предложенному въ § 59 мѣ
изображенію $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 +$
 $(2a+b)b$; положи $a=c, b=d$, найди вторую
степень величины $c+d$, которая будетъ $= c^2$
 $+ 2cd + d^2$; потомъ положи $a=c+d$, и $b=h$:
при чемъ, разсмащивая изображеніе $a^2 + 2ab + b^2$,
должно бы найти вторую степень количе-
ства $c+d=a$, которая уже $= c^2 + 2cd + d^2$; и
такъ осталось только $c+d=a$ удвоить, а по-
томъ, умножа чрезъ $h=b$, сложить со второю
степенью величины $h=b$, отъ чего будетъ
 $2ab + b^2 = 2(c+d)h + h^2$. Сіе найденное количе-
ство придай ко второй степени величины $c+d$,
коихъ сумма $c^2 + 2cd + d^2 + 2(c+d)h + h^2 = c^2 +$
 $2cd + d^2 + 2ch + 2dh + h^2 = (c+d+h)^2$, будетъ пре-
буемая степень данной величины.

§ 67. *Задача.* Данное количество $c+d+e$
возвыситъ во вторую степень.

Рѣшен. Положимъ $c=a$ и $d=b$, по сообра-
зуюсь съ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, будетъ вто-
рая степень количества $c+d=c^2 + 2cd + d^2 =$
 $(c+d)^2$; потомъ положи $c+d=a$ и $e=b$, по
предъ-

предъидущей задачѣ, найдемся вторая степень количества $c+d+e=c^2+2cd+d^2+2(c+d)e+e^2$, а наконецъ положи $a=c+d+e$ и $b=h$, должно бы, смотря на предписанное изображение, найти вторую степень количества $c+d+e$, но какъ уже вторая степень сего количества сыскана, то слѣдуетъ только $c+d+e=1$ удвоить, и умноживъ чрезъ h , сложить со второю степенью количества h , отъ чего будетъ $2ab+b^2=2(c+d+e)h+h^2$. Сие количество придай ко второй степени величины $c+d+e$, коихъ сумма $c^2+2cd+d^2+2(c+d)e+e^2+2(c+d+e)h+h^2=c^2+2cd+d^2+2ce+2de+e^2+2ch+2dh+2eh+h^2=(c+d+e+h)^2$ будетъ искомая степень данной величины.

Примѣч. I. Изъ двухъ предъидущихъ задачъ явствуетъ, что квадратъ многочасной величины состоитъ во первыхъ, изъ квадратовъ каждой части, и изъ удвоенныхъ произведеній каждой двухъ частей между собою.

Примѣч. II. Когда некоторые члены данного количества будутъ отрицательные, то по сему же правилу найдемся его вторая степень, если только къ двойнымъ произведеніямъ припишутся знаки, какой каждому принадлежать будетъ, на примѣрѣ: квадратъ или вторая степень величины $a-b+c$, будетъ $=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

Примѣч. III. Посредствомъ предписанныхъ правилъ, всякая сложная величина во вторую степень возвышена быть можетъ.

§ 68. *Задача.* изъ числа 2374 посредствомъ предъидущихъ предложеній составивъ вторую степень.

Рѣшен. Поелику число 2374 состоитъ изъ четырехъ знаковъ, то представляя его четы-

ны-

тырехъ-частнымъ количествомъ, положи, $2000 = a$, $300 = b$, $70 = c$, $4 = d$, будетъ $2000 + 300 + 70 + 4 = a + b + c + d = 2374$; потомъ сыщи впорую степень количества $a + b + c + d$, которая будетъ $= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = (a + b + c + d)^2$ (§ 67.); но дабы по сему предложенному образцу, представитьъ квадратъ данной величины числами, то взявши первую часть 2 (исключая нули) вмѣсто a , умножь квадратино, будетъ $a^2 = 4$;

сие число напиши на своемъ мѣстѣ, какъ слѣдуетъ; потомъ дважды взятую первую

$a^2 = 4$	-	-	-	-
$2ab = 12$	2	-	-	-
$b^2 = 9$		9	-	-
$2(a + b)c = 322$	3	2	2	-
$c^2 = 49$			4	9
$2(a + b + c)d = 1896$	1	8	9	6
$d^2 = 16$				16
$(a + b + c + d)^2 = 5635876$				

часть 2, то есть $2 \times 2 = 4 = 2a$ умножь впорую частью $3 = b$, произведение $12 = 2ab$ напиши подъ числомъ 4, однимъ знакомъ въ передъ (послику каждая единица сего произведенія вдесятеро меньше каждой единицы числа 4 (Часть I § 169); и для того впорой знакъ 2 долженъ занять въ производимомъ числѣ впорое мѣсто), квадратъ же впорой части $9 = b^2$, напиши такъ, чптобы оной стоялъ на прѣпьемъ мѣстѣ производимаго числа; потомъ возьми вмѣсто $a + b = 2000 + 300 = 2300 = 23$ (исключая нули) и удвоивши оное, умножь произведение $46 = 2(a + b)$ прѣптею частию $7 = c$, произведение $322 = 2(a + b)c$ напиши также однимъ знакомъ въ передъ, подъ коимъ напиши такимъ

же

же образомъ и квадраты прешней части $49 = c^2$; наконецъ, взявши первые три знака 237 вмѣсто $a + b + c$ и удвоивъ оное, произведение $474 = 2(a + b + c)$ умножь чрезъ послѣднюю часть $4 = d$, произведение $1896 = 2(a + b + c)d$ напиши подъ числомъ 49 однимъ знакомъ въ передъ; такимъ же порядкомъ поставь и квадраты послѣдней части $16 = d^2$; чрезъ что изобразится квадраты числа $2374 = 5635876$.

§ 69. Слѣдств. I. Изъ сего удобно можно видѣть, ежели квадраты какого нибудь числа раздѣлились отъ правой руки къ лѣвой на классы, считая въ каждой по два знака, не смотря на то, что въ послѣднемъ классѣ отъ лѣвой руки останется иногда одинъ знакъ, то въ немъ столько будетъ классовъ, сколько въ корнѣ его знаковъ; ибо самое меньшее число, состоящее изъ двухъ знаковъ, есть 10, котораго квадратъ 100 состоитъ изъ трехъ знаковъ, а самое большее число изъ двухъ знаковъ состоящее, есть 99, коего квадратъ 9801 состоитъ изъ четырехъ знаковъ; по сей причинѣ квадраты отъ чиселъ, между 10 и 100 заключающихся, изъ коихъ каждое состоитъ изъ двухъ знаковъ, меньше трехъ, и больше четырехъ знаковъ имѣть не могутъ; слѣдовательно каждой изъ сихъ квадратовъ содержитъ въ себѣ столько классовъ, сколько въ корнѣ его знаковъ. Такимъ же образомъ докажется, что квадраты отъ чиселъ, между 100 и 1000 заключающихся, имѣютъ столько классовъ, сколько въ корняхъ ихъ знаковъ и такъ далѣе. какъ здѣсь квадраты

5, 63, 58, 76 числа 2374, заключаеѣтъ въ себѣ столько классовѣ, сколько корень его имѣеѣтъ знаковѣ

Слѣдств. II. Изѣ погожѣ явствуетѣ, что квадратѣ первой части 2 заключаеѣтъ въ послѣднемѣ знакѣ 5 первого класса отѣ лѣвой руки; произведеніе первой части 2 на вторую 3 дважды взятое оканчивается въ первомѣ знакѣ второго класса; квадратѣ же второй части 3 находится въ послѣднемѣ знакѣ того же класса. Произведеніе двухѣ первыхѣ частей 23 на третью 7, дважды взятое, оканчивается въ первомѣ знакѣ третьего класса; а послѣдній знакѣ квадрата третьей части 7 заключаеѣтъ въ послѣднемѣ знакѣ того же класса. И наконецѣ послѣдній знакѣ произведенія трехѣ первыхѣ частей 237 на последнюю 4, дважды взятого, находится въ первомѣ знакѣ послѣдняго класса, а квадратѣ сей части оканчивается въ послѣднемѣ знакѣ того же класса.

§ 70. **Задача.** Величину $c+d+e$, состоящую изѣ трехѣ частей, возвысить въ третью степень.

Рѣшен. Сперва по предложенному въ § 59 мѣ изображенію $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, взявши вмѣсто $a = c$ и $b = d$, возвысь величину $c+d$ въ третью степень, которая будетѣ $= c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 = (c+d)^3$; потомѣ положи $a = c+d$ и $b = e$, должно бы, смотря на предложенной образецѣ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ найти третью степень количества $c+d+e$;

но

но какъ оная степень уже найдена, того ради умножь вѣпорую степень количества $c+d$ чрезъ 3 и чрезъ e , будетъ $3a^2b = 3(c+d)^2e$; потомъ онуюжь величину $c+d=a$, прижды взявѣшую, умножь вѣпорую степенью величины e , будетъ $3ab^2 = 3(c+d).e^2$; напоследокъ сии произведенія сложа съ претѣею степенью величины $e=b$, копорая $=e^3$, то есть $3(c+d)^2e + 3(c+d).e^2 + e^3$, придай къ претѣей степени количества $c+d$, коихъ сумма $c^3+3c^2d+3cd^2+d^3+3(c+d)^2e+3(c+d).e^2+e^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3+3c^2e+6cde+3d^2e+3ce^2+3de^2+e^3=(c+d+e)^3$ будетъ требуемая степень данной величины.

§ 71. Задача. Даннаго количества $c+d+e+h$ найти претѣю степень.

Рѣшен. Сперва по предѣидущей задачѣ сыщи претѣю степень количества $c+d+e$, копорая будетъ $=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3+3(c+d)^2e+3(c+d).e^2+e^3$; потомъ положи $c+d+e=a$ и $h=b$, должно бы, смотря на предписанной въ § 59 мѣ образецъ, найти претѣю степень количества $c+d+e$; но какъ уже оная степень найдена, то сообразуясь со вѣпорымъ членомъ помянутаго образца, представъ количество $c+d+e=a$ вѣпорую степенью, копорое умножа чрезъ 3 и чрезъ $h=b$, будетъ $3a^2b = 3(c+d+e)^2h = 3c^2h+6cdh+3d^2h+6cedh+3e^2h$; потомъ, сравнивая претѣй членъ образца $3ab^2$ со взятыми вмѣсто ихъ равными количествами, умножь прижды взявѣшую величину $c+d+e=a$ вѣпорую степенью количества $h=b$, получишь $3ab^2 = 3(c+d+e)h^2 =$
 $3ch^2$

$3ch^2 + 3dh^2 + 3eh^2$; наконецъ сумму сихъ двухъ найденныхъ произведений, сложа съ претпью степенью величины $h = b$, которая $= h^3$, то есть $3(c + d + e)^2 h + 3(c + d + e) h^2 + h^3$, придай къ претпью степени величины $c + d + e$, коихъ сумма $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3(c + d)^2 e + 3(c + d)e^2 + e^3 + 3(c + d + e)^2 h + 3(c + d + e)h^2 + h^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2h + 3bcdh + 3d^2h + 3edh + 3ceh + 3e^2h + 3ch^2 + 3dh^2 + 3eh^2 + h^3 = (c + d + e + h)^3$ будетъ искомая степень даннаго количества.

§ 72. Задача. Даннаго числа 2346, посредствомъ предъидущихъ Задачъ, найти претпью степень.

Рѣшен. Поелику число 2346 имѣетъ въ себѣ 4 знака, того ради представъ оное четырехъчастнымъ, то есть положи $2000 = a$, $300 = b$, $40 = c$, $6 = d$, будетъ $2000 + 300 + 40 + 6 = a + b + c + d = 2346$; попомъ по предъидущей задачѣ сыщи претпью степень количества $a + b + c + d$, которая будетъ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c).d^2 + d^3$; но дабы каждой членъ сей степени изобразить числами, то взявши первую часть 2 (исключая нули) вмѣсто a , сыщи претпью степень оной, будетъ $a^3 = 8$, которое напиши на своемъ мѣстѣ, какъ слѣдуетъ; попомъ прижды взявную вторую степень первой части 2, то есть $3.2.2 = 12$, умножь вторую частью $3 = b$, произведение $36 = 3a^2b$ напиши подъ числомъ 8 однимъ знакомъ въ передъ (поелику

елику каждая единица сего произведенія въдеся-

перо меньше

$$a^3 = 8$$

каждой едини-

$$3a^2b = 36$$

цы числа 8

$$3ab^2 = 54$$

(Часть I § 169);

$$b^3 = 27$$

и для того

$$3(a+b)^2c = 6348$$

второй знакъ

$$3(a+b)c^2 = 1104$$

долженъ за-

$$c^3 = 64$$

нять въ про-

$$3(a+b+c)^2d = 985608$$

изходимомъ чи-

$$3(a+b+c)d^2 = 25272$$

слѣ второе мѣ-

$$d^3 = 216$$

сто); потомъ

$$(2346)^3 = 12911717736$$

прижды взявшаю первую часть умножь ква-
драпомъ второй части, произведение $3 \cdot 2 \cdot 9 =$
 $54 = 3ab^2$ поставь подъ числомъ 36, такъ
чтобы послѣдній знакъ занималъ третье мѣ-
сто въ производимомъ числѣ; кубъ же второй
части $27 = b^3$ напиши подъ числомъ 54,
также однимъ знакомъ впередъ; потомъ
возьми 23 вмѣсто $a + b = 2000 + 300$ и $c = 4$
(исключая нули) и умножь квадрапъ двухъ пер-
выхъ частей 23, прижды взятой, третью ча-
стью 4, произведение $6348 = 3(a+b)^2c$ напи-
ши подъ числомъ 27 такимъ же порядкомъ,
какъ и прежде; послѣ сего двѣ первыя части,
прижды взявша, умножь квадрапомъ третьей
части $4 = c$, произведение $1104 = 3(a+b)c^2$,
поставь подъ числомъ 6348, какъ и прежде,
подъ коимъ напиши такимъ же образомъ и кубъ
третьей части $64 = c^3$, и такъ далѣе изобра-
зя всѣ члены числами, наконецъ сложи оныя
вмѣстѣ, коихъ сумма будетъ третья степень
числа 2346.

§ 73. *Слѣдств.* Изъ сего явствуетъ, ежели кубическое число раздѣлился отъ правой руки къ лѣвой на классы, считая въ каждой по три знака (почитая за классъ оставшейся иногда въ послѣдней классъ отъ лѣвой руки одинъ или два знака); то въ немъ столько будетъ классовъ, сколько въ корнѣ его находится знаковъ: ибо самое меньшее число состоящее изъ двухъ знаковъ, есть 10, котораго кубъ 1000 состоитъ изъ 4хъ знаковъ; а самое большее число изъ двухъ знаковъ состоящее, есть 99, коего третья степень 970,299 состоитъ изъ шести знаковъ; по сему кубы отъ чиселъ между 10 и 100 содержащихся, изъ коихъ каждое имѣетъ по два знака, меньше четырехъ и больше шести знаковъ имѣть не могутъ; слѣдовательно каждой изъ сихъ кубовъ заключаетъ въ себѣ столько классовъ, сколько въ корнѣ его знаковъ. Такимъ же образомъ докажется, что кубы отъ чиселъ, между 100 и 1000 заключающихся, имѣютъ столько классовъ, сколько въ корняхъ ихъ знаковъ.

Слѣдств. II. Изъ того же легко усмотрѣть можно, что кубъ 8 первой части 2, заключается въ послѣднемъ знакѣ перваго класса отъ лѣвой руки; послѣдній знакъ произведенія квадрата первой части 2 на вторую 3, трижды взятаго, находится въ первомъ знакѣ втораго класса; а послѣдній знакъ произведенія первой части 2 на квадратъ второй части трижды взятаго, оканчивается во второмъ знакѣ; кубъ же второй части заключается въ послѣднемъ знакѣ того же класса. Произведеніе квадрата двухъ первыхъ частей 23 на третью 4 трижды взятое, оканчивается въ первомъ знакѣ третьей части; послѣдній же знакъ произведенія двухъ первыхъ частей 23 на вторую степень третьей части трижды взятаго, заключается во второмъ знакѣ, а кубъ третьей части 4 находится въ послѣднемъ знакѣ того же класса; и такъ далѣе.

§ 74. *Прибавлен.* Такимъ же порядкомъ по предложеннымъ изображеніямъ въ (§ 66 и 70) находятся другія высшія степени всякаго сложнаго Алгебраическаго количества, на примѣръ: количество $3x^2 - \frac{1}{2}c^2$ возвысимъ въ 4 ю степень. Поселику образецъ четвертой степени есть слѣдующій:

дующій: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
 (§ 59); того ради положи $a = 3x^2$, $b = -\frac{1}{2}c^3$,
 и такъ найдется $a^4 = 81x^8$, $4a^3b = -4.27x^6\frac{1}{2}c^3$
 $= -54x^6c^3$, $6a^2b^2 = 6.9x^4.\frac{1}{4}c^6 = \frac{27}{2}x^4c^6$, $4ab^3 = -4.$
 $3x^2.\frac{1}{8}c^9 = -\frac{3}{2}x^2c^9$, и $b^4 = \frac{c^{12}}{16}$; посему искомая
 степень $(3x^2 - \frac{1}{2}c^3)^4 = 81x^8 - 54x^6c^3 + \frac{27}{2}x^4c^6$
 $- \frac{3}{2}x^2c^9 + \frac{c^{12}}{16}$.

О нахожденіи или извлеченіи корней изъ
 простыхъ и сложныхъ количествъ.

§ 75. Опредѣл. Количество a , множащееся
 одинъ разъ самимъ собою для a^2 , называется
 корень второй степени или корень квадрат-
 ной отъ a^2 ; такъ же bc есть корень квадратной
 отъ b^2c^2 . Количество a^2 , множащееся два ра-
 за самимъ собою, есть корень куба отъ a^6 . Ко-
 личество x , множащееся три раза самимъ со-
 бою, есть корень четвертой степени отъ x^4 . И
 вообще корень степени n , отъ количества a^n
 есть a ; потому что для сысканія степени a^n
 величина a умножается сама собою $n - 1$ разъ.

§ 76. Слѣдств. Изъ сего удобно можно ви-
 дѣть, что при сысканіи корней какой нибудь
 степени, показатель данной величины дѣлится
 на кореннаго показателя, на примѣръ: ко-
 рень второй степени отъ $a^2 = a^{\frac{2}{2}} = a$; корень
 той же степени отъ $a^6 = a^{\frac{6}{2}} = a^3$; ибо $a^3 \times a^3 = a^6$;

корень куба или третьей степени отъ $a^6 = a^{\frac{6}{3}} = a^2$; корень четвертой степени изъ $a^4 = a^{\frac{4}{4}} = a$ и проч. И вообще для сисканія корня степени n изъ a^{mn} , должно раздѣлить показателя m на кореннаго показателя n ; будетъ требуемой корень $a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

§ 77. Положен. Коренной знакъ употребляется слѣдующій $\sqrt{}$, на примѣръ: корень второй степени или квадратной изъ a^2 пишется такъ: $\sqrt{a^2}$ или $\sqrt[2]{a^2} = a$. Корень куба или третій степени изъ a^6 , изображается чрезъ $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. И вообще корень степени n изъ a^{mn} пишется такимъ образомъ: $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

§ 78. Определ. Количество, принадлежащее коренному знаку, называется радикальною или коренною величиною, на примѣръ: $p\sqrt[3]{b^3c^6}$, также $\sqrt[2]{a^4}$, или $\sqrt[4]{a^4}$ суть количества коренныя. Количество p , по лѣвую сторону кореннаго знака находящееся, называется предстоящимъ коренной величины $\sqrt[3]{b^3c^6}$; а количество b^3c^6 , съ правой стороны знака стоящее, зовется величина подъ знакомъ. Показателемъ кореннаго знака или показателемъ корня называется число, показывающее, какой степени корень найтти должно, на примѣръ: у величины $\sqrt[2]{b^4}$ или $\sqrt[2]{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$, показатель корня есть 2;
у

у величины $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$, показатель кореннаго знака есть 3; и вообще у величины $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, показатель корня есть n .

Примѣч. Ежели какая нибудь коренная величина, на примѣръ: $\sqrt{b^2c^4}$ предстоящаго не имѣетъ, то предстоящимъ сей величины разумѣется 1 ца, какъ-то $\sqrt{b^2c^4} = 1.\sqrt{b^2c^4}$.

§ 79. **Опредѣл.** Коренная величина, изъ которой почнаго корня найши не можно, называется *неизвлекаемая* или *глухая*, на примѣръ: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ и проч. также \sqrt{b} , $\sqrt[3]{a^2}$ и проч. суть величины неизвлекаемыя или глухія.

§ 80. **Прибавлен.** Хотя изъ числа 7, также и изъ b , подлиннаго квадрашнаго корня сыскать не можно; однакожъ мы имѣемъ ясное понятіе, естли квадрашноу корень изъ 7, то есть $\sqrt{7}$, самимъ собою помножився, то въ произведеніи $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$ безъ сомнѣнія произойдетъ 7; также $\sqrt{b} \times \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = b$.

§ 81. **Слѣд. I.** Когда показатель всякаго корня есть дѣлишель показателя величины, подѣ знакомъ находящейся: то посредствомъ сего правила легко можно либо найши, или по крайней мѣрѣ изобразить пребуемой корень всякой величины безъ кореннаго знака, какъ изъ слѣдующихъ

примѣровъ видно: $\sqrt[2]{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$.

$\sqrt[2]{a^3 b^2} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{3}{2}} b$. $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

$\sqrt[{\frac{2}{3}}]{a} = a^{1 \cdot \frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$. $a^2 \sqrt[3]{b} = a^2 b^{\frac{1}{3}}$. $\sqrt[{\frac{n}{m}}]{a^m} = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

§ 82. Слѣд. Когда при возвышеніи дроби въ какую нибудь степень, числитель и знаменатель возвышаются въ пребуемую степень (§ 58), на

примѣръ: вторая степень дроби $\frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2}$; третья

степень дроби $\frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3}$ и проч. то изъ сего слѣ-

дуетъ, что для сысканія пребуемаго корня данной дроби должно извлечь оной какъ изъ числителя, такъ и изъ знаменателя дроби, на

примѣръ: квадратной корень дроби $\frac{a^2}{n^2} = \sqrt{\frac{a^2}{n^2}} = \frac{a}{n}$.

Корень куба изъ дроби $\frac{a^3}{n^3} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{n^3}} = \frac{a}{n}$. Тожъ должно разумѣть и о слѣдующихъ примѣрахъ:

$$\sqrt[{\frac{1}{a}}]{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}. \sqrt[{\frac{16a^2}{c}}]{c} = \frac{4a}{\sqrt{c}}$$

$$\sqrt[{\frac{2}{3}}]{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[{\frac{1}{2}}]{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}. \sqrt[{\frac{a^3 e^2}{c^4}}]{c^4} = \frac{a e^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = \frac{a \sqrt[3]{e^2}}{\sqrt[3]{c^4}}$$

$$\sqrt[{\frac{4}{a^2}}]{a^4 n^5 c} = \frac{a^{\frac{5}{2}} c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a \sqrt[4]{n^5 c}}{\sqrt{a}}. \sqrt[{\frac{8a^3}{27n^6}}]{27n^6} = \frac{2a}{3n^2}$$

§ 83. Примѣчан. Изъ вышеписанныхъ предложеній видно, что всякая величина съ кореннымъ знакомъ можетъ изобразиться и безъ онаго, такъ что показатель оной будетъ или цѣлое число, либо дробь, у которой

числитель есть показатель данной величины, подъ знакомъ находящейся, а знаменатель есть показатель корня, на примѣръ: $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$ и проч. и обратно, всякая величина, имѣющая показателя дробь, можетъ быть изображена съ кореннымъ показателемъ, на примѣръ: $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$; также $b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2}$; и вообще $b^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{b^r}$ и проч.

§ 84. Прибавлен. Ежели потребно будетъ, чтобы по извлеченіи искомаго корня, одинъ только числитель былъ съ кореннымъ знакомъ: то прежде умножь числителя и знаменателя предложенной дроби знаменателемъ, возвышеннымъ въ степень кореннаго показателя единицею уменьшеннаго; потомъ извлеки требуемой корень, получишь такую дробь, у которой одинъ только числитель будетъ неизвлекаемой,

на примѣръ: $\sqrt[n]{\frac{a}{n}}$ по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ n будетъ $= \sqrt[n]{\frac{an}{n^2}} = \frac{\sqrt[n]{an}}{n}$; такъ

же $\sqrt[n]{\frac{nc^2}{a}}$ по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ a^1 будетъ $= \sqrt[n]{\frac{nc^2a^1}{a^3}} = \sqrt[n]{\frac{nc^2a^2}{a}}$; и

$\sqrt[3]{\frac{75}{125}} \times 25 = \sqrt[3]{\frac{75 \times 25^3}{125}} = \sqrt[3]{\frac{75 \times 15625}{125}} = \sqrt[3]{75 \times 125} = \sqrt[3]{9375}$. Равнымъ образомъ

$\sqrt[4]{\frac{c}{an}} \times a^3n^3 = \sqrt[4]{\frac{ca^3n^3}{a^4n^4}} = \sqrt[4]{\frac{ca^3n^3}{an}}$. Но дабы по извлеченіи корня изобразить числителя данной дроби безъ кореннаго знака, то сперва умножь числителя и знаменателя данной дроби, числителемъ, возвышеннымъ въ степень кореннаго показателя единицею уменьшеннымъ, а потомъ извлеки требуемой корень, будешь имѣть

желаемую дробь, на примѣръ: $\sqrt[2]{\frac{a}{c}}$, по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ a , будетъ

$$\sqrt[2]{\frac{a^2}{ac}} = \frac{a}{\sqrt{ac}}; \text{ также } \sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}, \text{ по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ } a^2 \text{ будетъ}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{a^3}{a^2c^2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2c^2}}, \text{ и } \sqrt[4]{\frac{1}{7}} \times 16 = \sqrt[4]{\frac{64}{112}} = \sqrt[4]{\frac{4}{112}}.$$

Равнымъ образомъ $\sqrt[n]{\frac{c}{n^2}} \times c^3 = \sqrt[n]{\frac{c^4}{n^2c^3}} = \frac{c}{\sqrt[n]{n^2c^3}}$ и проч.

§ 85. Теорема. Всякой квадратной корень имѣетъ два рѣшенія, то есть знакъ предъ корнемъ долженъ быть $+$ или $-$.

Доказат. Положимъ, что извлекается квадратной корень изъ a^2 , то будетъ $\sqrt{a^2} = \pm a$; ибо $a^2 = +a \times +a$, также $a^2 = -a \times -a$, слѣдовательно всякой квадратъ положительной величины имѣетъ всегда два корня, или положительной или отрицательной.

§ 86. Прибавлен. Изъ сего явствуетъ, что всякой корень чотпаго числа имѣетъ два корня, то есть или положительной или отрицательной, на примѣръ: $\sqrt{p^2} = \pm p^2$, поелику $p^2 = +p^2 \times +p^2 \times +p^2 \times +p^2 = -p^2 \times -p^2 \times -p^2 \times -p^2$ и прочая.

§ 87. Слѣдств. Изъ сего удобно можно разумѣть, что всякой корень изъ отрицательной величины, на примѣръ: $\sqrt{-a^2}$ есть количество невозможное; поелику оно не можетъ про-

произойти ни отъ $+$ ни отъ $-$; ибо $+a \times +a = a^2$, также и $-a \times -a = +a^2$; по сей причинѣ корень изъ $-a^2$, означается слѣдующимъ образомъ: $\pm \sqrt{-a^2}$; также всякой корень чотнаго числа изъ отрицательной величины будетъ количество невозможное, на примѣръ: $\pm \sqrt[4]{-a^4}$. Такія количества именуются мнимыя.

§ 88. *Задача.* Изъ сложной величины $a^2 + 2ab + b^2$ извлечь квадратной корень.

Рѣшен. Дабы показать, какимъ образомъ находится квадратной корень изъ сложныхъ количествъ, то должно сперва разсмотрѣть, что квадратъ количества $a + b = a^2 + 2ab + b^2$ (§ 59) состоитъ изъ квадрата первой части a , то есть a^2 ; изъ произведенія первой части a на вторую b , дважды взятого, то есть $2ab$; и изъ квадрата b^2 второй части b . И такъ написавши данное количество, какъ слѣдуетъ: 1) съищи прежде корень квадрата изъ перваго члена a^2 , которой есть a ; написавши оной по правую сторону за

$2a + b$	$2ab + b^2$
	$2ab + b^2$

чертою, вычти квадратъ сего корня изъ $a^2 + 2ab + b^2$, останется $2ab + b^2$; а чтобъ найти второй членъ корня, раздѣли $2ab$ на удвоенную первую часть корня, то есть на $2a$, частное $+b$ будетъ вторая часть корня, которою умножа удвоенной первой членъ $2a$ и сложа сіе произведеніе съ b^2 , вычти изъ остатка $2ab + b^2$,

оную первую часть остатка $-bx^2d$, частное $-d$ припиши къ bx^2 , также и къ первой части корня $3x^2$, какъ изъ примѣра видно; наконецъ умножа сею вторую частію корня $-d$, написанное по лѣвую сторону количество bx^2-d , произведение $-bx^2d+d^2$ вычти изъ остатка; и такъ искомой корень будетъ $3x^2-d$.

§ 90. Задача. Найди квадратной корень изъ данной величины $c^4 + 6c^2b + 9b^2 - 2nc^2 - 6nb + n^2$.

Рѣшен. Сыскавши изъ величины $c^4 + 6c^2b + 9b^2$, корень квадрата $c^2 + 3b$, какъ въ предъидущей задачѣ показано, умножь оной чрезъ 2, произведение $2c^2 + 6b$ напиши по лѣвую сторону

$$\sqrt{c^4 + 6c^2b + 9b^2 - 2nc^2 - 6nb + n^2} = c^2 + 3b - n \text{ кор.}$$

$$\begin{array}{r|l} 2c^2 + 3b & 6c^2b + 9b^2 \\ & 6c^2b + 9b^2 \\ \hline 2c^2 + 6b - n & -2nc^2 - 6nb + n^2 \\ & -2nc^2 - 6nb + n^2 \\ \hline \end{array}$$

○

остатка $-2nc^2$ и прочая; потомъ раздѣли первой членъ остатка $-2nc^2$ на первой членъ $2c^2$ написанной величины по лѣвую сторону, частное $-n$ припиши къ корню $c^2 + 3b$ и къ удвоенному количеству $2c^2 + 6b$; наконецъ умножа количество $2c^2 + 6b - n$ чрезъ третью часть корня $-n$, произведение $-2nc^2 - 6nb + n^2$ вычти изъ остатка, чрезъ что найдется требуемой корень $c^2 + 3b - n$.

Такимъ

Такимъ же образомъ извлекается квадрашной корень и изъ другихъ сложныхъ количествъ, ежели только оныя будутъ совершенные квадраты. Какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{r} \sqrt[4]{b^4+2b^3+3b^2+2b+1} (=b^2+b+1 \text{ ис. корен.}) \\ \underline{2b^2+b} | 2b^3+3b^2 \\ 2b^3+b^2 \\ \hline 2b^2+2b+1 | 2b^2+2b+1 \\ 2b^2+2b+1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} \sqrt[4]{9a^4-30a^2b^2c+25b^4c^2+42a^2c^2-70b^2c^3+49c^4} \\ \text{иск. кор.} \\ 3a^2-5b^2c+7c^2 \\ \hline 6a^2-5b^2c | -30a^2b^2c+25b^4c^2 \\ -30a^2b^2c+25b^4c^2 \\ \hline 6a^2-10b^2c+7c^2 | 42a^2c^2-70b^2c^3+49c^4 \\ 42a^2c^2-70b^2c^3+49c^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r} \sqrt[4]{\frac{4}{9}b^2+\frac{1}{3}bc^2+\frac{2}{9}c^4+\frac{8}{27}bd^3+\frac{3}{5}c^2d^3+\frac{4}{25}d^5} \\ \phantom{\frac{4}{9}b^2+\frac{1}{3}bc^2+\frac{2}{9}c^4+\frac{8}{27}bd^3+\frac{3}{5}c^2d^3+\frac{4}{25}d^5} \frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c^2+\frac{2}{5}d^3 \\ \hline \frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c^2 \phantom{+\frac{2}{5}d^3} | bc^2+\frac{2}{9}c^4 \\ \phantom{\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c^2+\frac{2}{5}d^3} bc^2+\frac{2}{9}c^4 \\ \hline \frac{4}{3}b+\frac{1}{5}c^2+\frac{2}{5}d^3 \phantom{+\frac{2}{5}d^3} | \frac{8}{27}bd^3+\frac{3}{5}c^2d^3+\frac{4}{25}d^5 \\ \phantom{\frac{4}{3}b+\frac{1}{5}c^2+\frac{2}{5}d^3} \frac{8}{27}bd^3+\frac{3}{5}c^2d^3+\frac{4}{25}d^5 \end{array}$$

§ 91. Задача. Изъ даннаго квадрата 207,942 извлечь его корень.

Рѣшен. Раздѣля данное число отъ правой руки къ лѣвой на классы какъ въ § 69 показано, будетъ извѣстно, что корень сего квадрата, въ разсужденіи классовъ, состоитъ изъ трехъ знаковъ: образецъ же второй степени двучаснаго корня $a + b = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)b$. И такъ для извлеченія корня изъ даннаго числа, разсматривай по таблицѣ § 57.

отъ какого числа будетъ ближайшій квадратъ къ числу 20, составляющему первой классъ квадрата; найдемъся 16, коего корень $4 = a$ напиши съ правой руки за

$$\begin{array}{r} \sqrt{20,79,42} \quad (456 = \text{корню} \\ \quad \quad \quad 16 \\ \hline 85 \overline{)47.9} \\ \quad \quad \underline{142} \quad 5 \\ \hline 906 \overline{)544.2} \\ \quad \quad \underline{543} \quad 6 \end{array}$$

6 остатокъ

чертою, какъ изъ примѣра видно; вычти квадратъ онаго 16 изъ 20, къ остатку 4 припиши второй классъ 79, попомъ удвоенную первую часть корня, то есть $8 = 2a$ напиши по лѣвую сторону остатка: но поелику послѣдній знакъ произведенія первой части на вторую дважды взятаго, оканчивается въ первомъ знакѣ второго класса (§ 69 Слѣдств. 2), по сей причинѣ опредѣля одинъ знакъ отъ правой руки почкою, раздѣли оставшееся къ лѣвой рукѣ число 47, на удвоенную первую часть, то есть на 8, частное число 5 будетъ вторая часть корня $= b$, которую приписавши къ кор-

ню 4 съ правой руки, умножь удвоенную первую часть $8=2a$ впрочемъ частію 5, подъ симъ произведеніемъ $40=2ab$ подпиши на особливомъ мѣстѣ квадратъ впрочемъ части такимъ образомъ: 40_{25} , коихъ сумма будетъ $425=2ab+b^2$, или все равно, къ удвоенной первой части придай впрочемъ часть $5=b$, потомъ сіе число $85=2a+b$ умножь впрочемъ частію 5; произведение 425 равное прежнему, вычпи изъ остатка 479 *), останется 54, къ сему числу припиши послѣдній классъ квадрата; потомъ найденныя двѣ первыя части $45=a$ умноживъ чрезъ 2, произведение $90=2a$ поставь съ лѣвой стороны остатка, и отдѣля въ остаткѣ одинъ отъ правой руки знакъ 2 почкою, раздѣли 544 на 90, частное число 6, будетъ третья часть корня $=b$; которую написавши въ корнѣ съ правой руки, придай къ числу 90, будетъ $906=(2a+b)$; наконецъ сіе число умножь чрезъ третью часть 6, произведение $5436=(2a+b)b$, вычпи изъ остатка 5442 **). И такъ найденной корень будетъ 456 съ остаткомъ 6; которой ежели умножится самимъ собою одинъ разъ, и къ сему произведенію придастся остатокъ 6, то выйдетъ предложенной квадратъ 207942.

§ 92.

*) Иногда произведеніе изъ суммы, дважды взятой первой части со впрочемъ на впрочемъ же часть, бываетъ больше того числа, изъ котораго вычислять должно; въ такомъ случаѣ найденную чрезъ дѣленіе впрочемъ часть надлежитъ уменьшитъ единицею, а иногда 2 мя, и потомъ производитъ дѣйствіе, какъ показано.

**) И въ семъ произведеніи, поже должно наблюдать, что сказано въ предъидущемъ примѣчаніи о первомъ.

§ 92. Прибавл. Хотя не всегда можно скидывать совершенные корни изъ квадрапныхъ чиселъ, какъ на примѣръ: изъ чиселъ 2, 3, 5 и проч. (коихъ корни означаются чрезъ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и проч.) однакожь можно оныя безъ погрѣшности изображать посредствомъ десятичныхъ дробей почти совершенными; еспли только къ предложенному числу придастся нѣсколько разъ по два нуля, на примѣръ: $\sqrt{(5,00,00,00)} 2.236'''$ для извлеченія квадрапнаго корня изъ числа 5, $\frac{4}{42 \overline{) 100}}$ придай къ оному четыре или шесть нулей; потомъ раздѣля на классы, извлеки квадрапной корень какъ слѣдуетъ; чрезъ что найдется квадрапной корень 2. 236''', въ коемъ заключается двѣ единицы съ 236 тысячными частями; которой безъ погрѣшности почищать можно совершеннымъ.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 42 \overline{) 100} \\ \underline{84} \\ 443 \overline{) 1600} \\ \underline{1329} \\ 4466 \overline{) 27100} \\ \underline{26796} \\ 304 \end{array}$$

Примѣч. Изъ сего видно, что совершенный корень неизвлекаемаго числа, на прим. $\sqrt{5}$ можно изобразить только какою нибудь дробью; ибо ежели положимъ, что дробь $\frac{a}{b}$ есть совершенный корень количества 5, то будетъ $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, посему квадрапъ $5 = \frac{aa}{bb}$ можно безъ погрѣшности принять за подлинной, поелику при извлеченіи корней остатки десятичныхъ дробей за ничто почищаются.

§ 93. Задача. Даннаго количества $x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$ найми корень куба или корень шрепшей степени.

Рѣшен. Поелику кубъ количества $a + b = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, состоитъ изъ куба первой части a , и изъ произведенія квадрата первой части a прижды взятаго, на вторую b , то есть $3a^2b$; также изъ произведенія прижды взятой первой части a на квадратъ второй части b , то есть $3ab^2$, и изъ куба второй части b (§ 59). И такъ написавши данное количество, какъ слѣдуетъ: сыщи прежде корень шрепшей степени изъ x^3 , которой будетъ $= x$; попомъ написавши оной по правую сторону даннаго куба за черпою, $3x^2 + 3xc + c$ вычпи кубъ сего корня, то есть x^3 изъ предложеннаго

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3)x + c} \\ x^3 \hline 3x^2c + 3xc^2 + c^3 \\ \times c \hline 3x^2c + 3xc^2 + c^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

куба, останется $3x^2c + 3xc^2 + c^3$; а для сысканія второй части корня, раздѣли первый членъ остатка $3x^2c$ на упроенной квадратъ первой части корня x , то есть на $3x^2$, частное c будетъ вторая часть корня; которую придавши къ первой части корня x , умножь упроенной квадратъ первой части x , то есть $3x^2$ второю частию c ; попомъ умножа прижды взятую первую часть то есть $3x$ квадратомъ второй части c , то есть чрезъ c^2 придай къ симъ двумъ произведеніямъ, кубъ второй части c , то есть c^3 , и напоследокъ вычпи сію сумму, то

то есть $3x^2c + 3xc^2 + c^3$ изъ остатка. И такъ
искомой корень куба будетъ $x + c$, которой
ежели умножится самъ собою два раза, то про-
изведение будетъ данное количество $x^3 + 3x^2c$
 $+ 3xc^2 + c^3$.

§ 94. Задача. Изъ количества $8x^3 + 12x^2n$
 $+ 6xn^2 + n^3 + 12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2 + 6xd^4$
 $+ 3nd^4 + d^6$ извлечь корень третьей сте-
пени.

Рѣшен. Сперва надлежитъ сыскать кубиче-
ской корень, какъ изъ предстоящаго 8, такъ и
изъ x первой величины $8x^3$, которой будетъ
съ предстоящимъ $= 2x$, что написавши съ пра-
вой руки за чертою, вычти кубъ сего корня,
то есть $8x^3$ изъ предложенной величины, оста-
нется $12x^2n + 6xn^2 + n^3$ и проч. потомъ со-
образуясь съ кубомъ величины $a + b$, которой
есть $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, найдется вторая
часть корня, естли только первая часть остатка
 $12x^2n$, раздѣлился на упрощенной квадратъ пер-
вой части, то есть на $12x^2$, частное n будетъ
вторая часть, которую приписавши къ первой ча-
сти корня, умножь $12x^2$ второю частию n , произ-
ведение будетъ $12x^2n$; потомъ трижды взявшаю
первую часть, то есть $6x$, умножь квадратомъ

второй части, то есть n^2 , произведение будетъ $6xn^2$; придавши къ симъ двумъ произведеніямъ кубъ n^3 второй части, сумму ихъ $12x^2n + 6xn^2 + n^3$, вычти изъ остатка, останется $12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2$ и проч. Дабы найти третью часть корня, то умножь найденныя двѣ первыя части $2x + n$ квадратно, произшедшей отъ сего квадратъ $4x^2 + 4xn + n^2$ умножь 3 мя, произведение будетъ $12x^2 + 12xn + 3n^2$; потомъ первую часть остатка $12x^2d^2$ раздѣли на первую часть упрощеннаго квадрата двухъ первыхъ частей, то есть на $12x^2$, частное d^2 будетъ третья часть искомаго корня, которую приписавъ къ двумъ частямъ съ правой руки, умножь чрезъ оную упрощенной квадратъ двухъ первыхъ частей, произведение будетъ $12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3nd^2$; потомъ умноживъ трижды взятыя двѣ первыя части, то есть $6x + 3n$, квадратомъ третьей части d^2 , произведение $6xd^4 + 3nd^4$ сложа съ первымъ произведеніемъ и кубомъ d^6 третьей части, сумму ихъ $12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2 + 6xd^4 + 3nd^4 + d^6$ вычти изъ остатка, чрезъ что найдется требуемой корень $2x + n + d^2$, которой ежели умножится самъ собою два раза, то произведение будетъ равно предложенному кубу.

V

$$\sqrt[11]{\begin{array}{c} (8x^3 + 12x^2n + 6xn^2 + n^3 + 12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2 + 6xd^4 + 3nd^4 + d^6)2x + n + d \\ 8x^3 \\ \hline 12x^2 \quad 12x^2n + 6xn^2 + n^3 \\ \hline 12x^2n + 6xn^2 + n^3 \\ \hline 12x^2 \quad 12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2 + 6xd^4 + 3nd^4 + d^6 \\ \hline 12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2 + 6xd^4 + 3nd^4 + d^6 \end{array}}$$

§ 95. Прибавлен. I. Ежели данное количество будетъ совершенной кубъ, то сыскавши корень куба первой части, какъ въ предъидущей задачѣ показано, слѣдуетъ только раздѣлить на квадратахъ сей части все тѣ величины даннаго куба, въ коихъ заключается квадратъ первой части, частное число покажетъ прочія части искомаго корня, какъ на примѣрѣ: въ предъидущемъ предложеніи квадратъ первой части, прижды взятой, есть $12x^2$, а тѣ величины, въ коихъ находится квадратъ первой части, суть $12x^2n + 12x^2d^2$, которыя раздѣля на $12x^2$, частное $n + d^2$ будутъ двѣ послѣднія части искомаго корня.

§ 96. Прибавлен. II. Такимъ же образомъ сыскивается кубической корень и изъ другихъ сложныхъ количествъ, ежели только оныя будутъ совершенные кубы, какъ на примѣрѣ: корень куба изъ величины $27n^6 + 54n^4c + 36n^2c^2 + 8c^3 - 27n^4b - 36n^2cb - 12c^2b + 9n^2b^2 + 6cb^2 - b^3$ найдется, еслии сперва извлечется корень куба изъ $27n^6$, которой будетъ $= 3n^2$; а потомъ раздѣляясь величины $54n^4c - 27n^4b$ (въ коихъ заключается квадратъ первой буквы корня n^2) на утроенной квадратъ первой части, то есть $54n^4c - 27n^4b$ на $27n^2$, частное $2c - b$ покажетъ двѣ послѣднія части корня; слѣдовательно корень куба предложенной величины будетъ $3n^2 + 2c - b$ *).

Ра-

*) Случится можетъ, что иногда квадраты первой части заключающся во многихъ членахъ и несовершеннаго куба; но дабы въ такомъ случаѣ не обмануться, то

Равнымъ образомъ найдемся кубической корень изъ величины $\frac{8}{27}n^3 - \frac{2}{3}n^2b + \frac{1}{3}nb^2 - \frac{1}{3}b^3 + \frac{8}{3}n^2x^3 - 4nbx^3 + \frac{2}{3}b^2x^3 + 8nx^6 - 6bx^6 + 8x^9$, естли только сперва извлечется корень куба изъ предстоящаго $\frac{8}{27}$ и величины n^3 первого члена, которой будетъ $= \frac{2}{3}n$, а потомъ совершится дѣйствіе, какъ въ § 95 показано, то естъ раздѣляя нѣ величины, въ коихъ заключается квадратъ первой буквы корня n , на упроенной квадратъ первой части $\frac{2}{3}n$: то естъ $-\frac{2}{3}n^2b + \frac{8}{3}n^2x^3$ на $\frac{4}{9}n^2 \times 3 = \frac{4}{3}n^2$, частное $-\frac{1}{3}b + 2x^3$ покажетъ двѣ послѣднія части корня. И такъ кубической корень предложенной величины будетъ $= \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}b + 2x^3$, которой ежели умножишь самъ собою два раза, то произведеніе будетъ равно данному кубу.

§ 97. Задача. Изъ даннаго куба 34,965,783 найми его корень.

Рѣшен. Раздѣля данное число отъ правой руки къ лѣвой на классы какъ въ § 73 показано, извѣстно будетъ, что кубической корень предложенной величины въ разсужденіи классовъ состоитъ изъ трехъ знаковъ; изображеніе же трепъей степени величины $a+b=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. И такъ для извлеченія корня разсматривай по таблицѣ § 57 отъ какого числа будетъ ближайшій кубъ къ числу 34, составляющему первой классъ куба, найдемся отъ числа 3хъ бли-

Е 3

жай-

по надлежитъ по сысканіи всѣхъ частей корня умножишь самихъ собою два раза; естли произведеніе будетъ равно данному кубу, то найденныя чрезъ упомянутое дѣленіе части, означать будутъ совершенной корень.

жайшій кубъ 27, котораго корень $3=a$ написавши за черпою съ правой спороны, какъ изъ примѣра видно, вычпи кубъ онаго 27 $=a^3$ изъ 34, кѣ оспашку 7 припиши второй классъ 965; попомѣ

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{34.965.783} \\ 27 \\ 27 \overline{) 79.65} \\ \underline{5768} \\ 3072 \overline{) 2197.783} \\ \underline{2197783} \end{array}$$

квадратѣ первой части 9, прижды взятой, по есть $27=3a^2$ напиши по лѣвую спорону оспашка; но какъ послѣдній знакъ произведенія изъ квадрата первой части, прижды взятаго, на вторую часть, оканчивается въ первомъ знакѣ второго класса (9 73 сл. II), того ради ошдѣля два знака оспашка съ правой руки почкою, раздѣли оставшееся число кѣ лѣвой рукѣ 79, на квадратѣ первой части 3, прижды взятой, по есть на 27, частное 2, будетъ вторая часть корня $=b$, которую приписавши кѣ первой части корня 3 съ правой спороны, умножь квадратѣ первой части, прижды взятой, по есть $27=3a^2$, вторую частію $2=b$; подѣ симъ произведеніемъ $54=3a^2b$, подпиши на особенномъ мѣстѣ, произведеніе прижды взятой первой части, на квадратѣ второго члена, по есть $3 \times 3 \times 4 = 36 = 3ab^2$, а подѣ симъ поставь кубъ второй части 8 такимъ образомъ: $54, \text{ сумму}$

ихъ 5768 вычпи изъ 7965 *); кѣ оспашку $\frac{8}{5768}$ 2197 припиши послѣдній классъ 783.

Теперь

*) Если случится, что помянутая сумма будетъ больше того количества, изъ котораго оную вычиташь

Теперь положи двѣ первыя части корня $32=a$, умножь квадрапѣ сихъ частей чрезъ 3, произведение $3072=3a^2$ поставь по лѣвую сторону остатка; потомъ отдѣля въ остаткѣ два знака съ правой руки, для послѣднихъ двухъ частей куба почкою, раздѣли оставшееся къ лѣвой рукѣ число 21977, на упроеенной квадрапѣ двухъ первыхъ частей, то есть на 3072, частное 7 будетъ третья часть искомаго корня $=b$; которую приписавъ въ корнѣ къ двумъ первымъ частямъ 32 съ правой руки, умножь квадрапѣ двухъ первыхъ частей, прижды взятой, то есть 3072 на впоруу часть 7, подѣ произведениемъ 21504 $=3a^2b$ подпиши произведение прижды взятыхъ двухъ первыхъ частей, на квадрапѣ третей части 7, то есть $32 \times 3 \times 49=4704=3ab^2$, а подѣ симъ кубъ третей части $343=b^3$, какъ предѣ симъ показано; сумму ихъ 2197783 вычпи изъ остатка; и такъ найденной корень куба будетъ 327, которой ежели умножится самъ собою два раза, то произведение будетъ равно данному кубу.

§ 98. Прибавлен. Ежели изъ даннаго куба совершеннаго корня извлечь не можно, то дабы подойти какъ можно ближе къ совершенству онаго, надлежитъ съ остаткомъ поступать какъ въ § 191 первой части показано, то есть точность корня изслѣдывать должно посредствомъ десятичныхъ дробей, какъ изъ слѣдующаго примѣра видно: Е 4 Изо-

пять должно; тогда найденная вторая часть, единицею или больше уменьшася; а потомъ уже производятся дѣйствіе, какъ сказано.

Изображеніе претвѣей степени $a + b = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$\begin{array}{r} \sqrt[4]{99.864(46.394''')} \\ 64 \\ \hline 3a^2 = 48 \quad \quad 358.64 \\ \quad \quad \quad \quad 233 \ 36 \\ \hline 3a^2 = 6348 \quad \quad 25 \ 280,00 \\ \quad \quad \quad \quad 19 \ 168 \ 47 \\ \hline 6431076 \ 111 \ 530,00 \\ \quad \quad \quad \quad 5 \ 799 \ 221 \ 19 \\ \hline 64620963 \ 312 \ 308810,00 \\ \quad \quad \quad \quad 258 \ 506119 \ 84 \\ \hline 53 \ 802690 \ 16 \end{array}$	$\begin{array}{l} 4 = a \\ 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 = 3a^2 \\ \hline 6 = b \\ \hline 288 = 3a^2b \\ 3 \cdot 4 \cdot 36 = 432 = 3ab^2 \\ \hline 216 = b^3 \\ \hline 33336 = 3a^2b^2 + 3ab^3 \\ \quad \quad \quad + b^4 \end{array}$ <p>Потомъ положи $46 = a$, продолжай извлеченіе, по предписанному об- разу даде.</p>
--	--

§ 99. Задача. Изъ предложенной величины 1874161 найми корень четвертой степени.

Рѣшен. Прежде дѣйствія надлежитъ себѣ представить изображеніе четвертой степени количества $a + b = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, съ каторою бы соображаясь можно было, извлекая корень четвертой степени. И такъ раздѣля данное число отъ правой руки къ лѣвой на классы, считая въ каждой по 4 знака, не смотря на то, что иногда въ послѣднемъ классѣ отъ лѣвой руки останется одинъ, два или три знака (что также за классъ считается); число классовъ покажетъ, изъ какихъ знаковъ корень четвертой степени состоятъ долженъ, какъ здѣсь изъ двухъ; потомъ раз-

V

$$\sqrt[4]{187,4161} (37=a+b.$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 108 \overline{) 1064,161} \\ \underline{1064} \\ 0 \end{array}$$

$$a^4=81$$

$$4a^3=108$$

$$b=7$$

$$4a^2b=756$$

$$6a^2b^2=2646$$

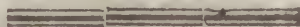
$$4ab^3=4116$$

$$b^4=2401$$

$$4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=1064161$$

смотря, отъ какого числа будетъ ближайшая четвертая степень къ числу 187 первого класса, найдется отъ 3 хъ, что будетъ первая часть искомого корня; которую написавъ по правую сторону данной величины за чертою, и положи $3=a$, возвысь оную въ четвертую степень, будетъ $a^4=81$; сие число вычти изъ первого класса 187, къ остатку 106 припиши слѣдующій классъ 4161; потомъ найденную первую часть $3=a$, возвысь въ третью степень, умножь чрезъ 4, произведение $108=4a^3$ напиши по лѣвую сторону остатка, и отдѣля отъ правой руки при знака точкою, оставшееся количество 1064 раздѣли на кубъ первой части, четырежды взятой, то есть на 108, частное хотя и будетъ 9; но сего числа, какъ по дѣйствію окажется, за вторую часть корня принять не можно, и для того уменьшивъ оное 2 мя, будетъ вторая часть искомого корня $7=b$; умножь сею частию кубъ первой части, четырежды взятой, то есть 108, произведение $756=4a^2b$ напиши на особомъ мѣстѣ; потомъ смотря на предложенной образецъ, умножь квадра-
той

90 О изображеніи корней изъ несовершенныхъ
 вой части шесть разъ взятой квадрамомъ второ-
 вой части, произведение будетъ $264b = 6a^2b^2$;
 также первую часть корня 3, чепырежды взя-
 тую, умножь кубомъ второй части, произведе-
 ніе будетъ $411b = 4ab^3$; и наконецъ сыщи
 чепвертую степень второй части корня 7, ко-
 торая будетъ $2401 = b^4$; потомъ написавши
 всѣ оныя произведенія одно подъ другимъ
 однимъ знакомъ впередъ, какъ въ примѣрѣ
 показано, вычпи сумму ихъ 1064161 изъ оспати-
 ка, чрезъ что найдется корень чепвертой сте-
 пени $= 37$, которой ежели умножишься самъ со-
 бою при раза, то произойдетъ данное количе-
 ство 1874161.



О изображеніи корней изъ несовершенныхъ
 степеней безконечнымъ рядомъ, прибли-
 жаясь къ истинному корню.

§ 100. Опредѣл. Несовершенною степенью
 именуется та величина, изъ которой дѣйстви-
 тельнаго корня найпи не можно.

§ 101. Задача. Изъ несовершеннаго квадрапа
 $c^2 + d^2$ извлечъ квадратной корень.

Рѣшен. Сперва сыщи корень квадрапа изъ
 первой части c^2 , которой будетъ равенъ c ,
 что написавши съ правой стороны за черпою,
 вычпи квадратъ сего корня, то естъ c^2 изъ
 даннаго количества, останеся d^2 ; потомъ на-
 писавши удвоенную первую часть корня по лѣ-
 вую сторону оспатка, раздѣли на оную оспа-
 токъ

покъ d^2 ; частное $\frac{d^2}{2c}$ будетъ вторая часть кор-

$$\sqrt{(c^2 + d^2)c + \frac{d^2}{2c} - \frac{d^4}{8c^3} + \frac{d^6}{16c^5} - \frac{5d^8}{128c^7} \text{ и проч.}}$$

$$\begin{array}{r} \frac{c^2}{2c + \frac{d^2}{2c}} \overline{) d^2} \\ \underline{d^2 + \frac{d^4}{4c^2}} \\ 2c + \frac{d^2}{c} - \frac{d^4}{8c^3} \overline{) \frac{d^4}{4c^2}} \\ \underline{\frac{d^4}{4c^2} - \frac{d^6}{8c^4} + \frac{d^8}{64c^6}} \\ 2c + \frac{d^2}{c} - \frac{d^4}{4c^3} + \frac{d^6}{16c^5} \overline{) \frac{d^6}{8c^4} - \frac{d^8}{64c^6}} \\ \underline{\frac{d^6}{8c^4} + \frac{d^8}{16c^6} - \frac{d^{10}}{64c^8} + \frac{d^{12}}{256c^{10}}} \\ - \frac{5d^8}{64c^6} + \frac{d^{10}}{64c^8} - \frac{d^{12}}{256c^{10}} \end{array}$$

ня, которую приписавъ къ первой части корня, и къ 2. по лѣвую сторону остатка, сумму $2c + \frac{d^2}{2c}$ умножь вправою частію $\frac{d^2}{2c}$, произведеніе $d^2 + \frac{d^4}{4c^2}$ вычми изъ d^2 , останется $-\frac{d^4}{4c^2}$. Для сысканія третей части корня, умножь найденныя двѣ первыя частіи чрезъ 2, произведеніе $2c + \frac{d^2}{c}$ напиши по лѣвую сторону остатка, потомъ раздѣля $-\frac{d^4}{4c^2}$ на первую часть $2c$ помянушаго произведенія, частное $-\frac{d^4}{8c^3}$ будетъ третья часть корня, которую приписавъ къ двумъ первымъ частямъ по правую сторону кор-

92 О изображеніи корней изъ несовершенныхъ
 корня, и къ двойному произведенію двухъ пер-
 выхъ частей по лѣвую сторону находящихся,
 умножь сію сумму $2c + \frac{d^2}{c} - \frac{d^4}{8c^3}$, препіею частию
 корня $-\frac{d^4}{8c^3}$, произведеніе $-\frac{d^4}{4c^2} - \frac{d^6}{8c^4} + \frac{d^8}{64c^6}$ вы-
 чти изъ $-\frac{d^4}{4c^3}$, останеся $+\frac{d^6}{8c^4} - \frac{d^8}{64c^6}$. И такъ
 далѣе продолжая дѣйствіе, какъ показано въ §
 90 и предложеннаго примѣра видно, найдется
 четвертая часть $+\frac{d^6}{16c^5}$, пятая $-\frac{5d^8}{128c^7}$ и проч.
 части корня, коихъ сумму безъ всякой погрѣш-
 ности за совершенной корень принять можно.

Такимъ же образомъ сыщется корень квадра-
 та и изъ величины $m - d$, гдѣ первая часть
 корня будетъ $m^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}$ (§ 81), посредствомъ
 которой найдутся и прочія части, какъ въ
 предъидущей задачѣ показано, что изъ слѣду-
 ющаго примѣра видѣшь можно.

$$\sqrt{(m-d)} \quad m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}} - \frac{d^2}{8m^{\frac{3}{2}}} - \frac{d^3}{16m^{\frac{5}{2}}} \text{ и проч.}$$

$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}$	$-d$
$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}$	$-d + \frac{d^2}{4m}$
$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{d^2}{8m^{\frac{3}{2}}}$
$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{d^2}{4m} - \frac{d^3}{8m^2} + \frac{d^4}{64m^3}$
$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}$	$-\frac{d^3}{8m^2} + \frac{d^4}{64m^3}$
$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}$	$-\frac{d^3}{8m^2} + \frac{d^4}{16m^3} + \frac{d^5}{64m^4} + \frac{d^6}{256m^5}$
$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}$	$-\frac{5d^4}{64m^3} - \frac{d^5}{64m^4} - \frac{d^6}{256m^5}$

остатокъ = $-\frac{5d^4}{64m^3} - \frac{d^5}{64m^4} - \frac{d^6}{256m^5}$

§ 102. Прибавлен. Помянутое изображаніе корней изъ несовершенной степени безконечнымъ рядомъ удобнѣе выводитъ посредствомъ неопредѣленной степени; поелику когда уже намъ извѣстны правила, какимъ образомъ величина $a+b$ возвышается въ неопредѣленную степень n (§ 63), какъ-то $(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{n}{1} \frac{b}{a} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^3} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{b^4}{a^4} \right.$ и проч.), то сія степень послужитъ намъ общимъ образцемъ къ извлеченію всякихъ родовъ корней; ибо предъ симъ уже показано, что корни всякой степени изображаются могутъ безъ коренныхъ знаковъ, такою величиною, у которой показатель будетъ дробь, какъ на примѣръ: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ и такъ далѣе; также $\sqrt{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ и проч. По сей причинѣ, для изображенія квадратнаго корня изъ несовершенной степени безконечною спрокою, на примѣръ: изъ величины x^2+c^2 , должно только поставивъ въ предложенномъ общемъ образцѣ $\frac{1}{2}$ вмѣсто n , то величины изображающія предстоящихъ, произойдутъ слѣдующія: $\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$ и проч. изъ коихъ ежели найдутся показаннымъ (въ § 59) порядкомъ предстоящія, и поставятся x^2 вмѣсто a и c^2 вмѣсто b , то помянутая степень $(a+b)^n = (x^2+c^2)^n$ изобразится слѣдующимъ образомъ:

зюмб: $(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{2}} \cdot (1 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{x^2} - \frac{1}{8} \frac{c^4}{x^4} + \frac{1}{16} \frac{c^6}{x^6} - \frac{5c^8}{128x^8} +$
и проч.) $= x (1 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{x^2} - \frac{1}{8} \frac{c^4}{x^4} + \frac{1}{16} \frac{c^6}{x^6} - \frac{5}{128} \frac{c^8}{x^8} + \text{про-}$
чая) $= x + \frac{c^2}{2x} - \frac{c^4}{8x^3} + \frac{c^6}{16x^5} - \frac{5c^8}{128x^7}$ и проч. $=$
 $\sqrt{(x^2+c^2)}$. = квадратному корню предложенной
величины x^2+c^2 .

Равнымъ образомъ сыщется корень квадрата
изъ предложенной въ § 101 величины $m-d$,
какъ явствуетъ: $\sqrt{(m-d)} = (m-d)^{\frac{1}{2}} =$
 $m^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{d}{2m} - \frac{d^2}{8m^2} - \frac{d^3}{16m^3} - \frac{5d^4}{128m^4} + \text{проч.} \dots) = m^{\frac{1}{2}} -$
 $\frac{d}{2m^{\frac{3}{2}}} - \frac{d^2}{8m^{\frac{5}{2}}} - \frac{d^3}{16m^{\frac{7}{2}}} - \frac{5d^4}{128m^{\frac{9}{2}}} - \text{и проч.} = \sqrt{m} -$
 $\frac{d}{2\sqrt{m}} - \frac{d^2}{8\sqrt{m^3}} - \frac{d^3}{16\sqrt{m^5}} - \frac{5d^4}{128\sqrt{m^7}} + \text{и проч.}$ въ ко-
торомъ ежели число m будетъ квадратное, на
примеръ: $m=c^2$, то будетъ $\sqrt{m}=c$, тогда
уже показанной корень изобразится такимъ обра-
зомъ: $\sqrt{(m-d)} = c - \frac{d}{2c} - \frac{d^2}{8c^3} - \frac{d^3}{16c^5} - \frac{5d^4}{128c^7}$ и
проч.

§ 103. Задача. Изъ данного числа 13 най-
ти ближайшій квадратный корень.

Рѣшен. Раздѣля данное число на двѣ части,
такъ чѣобы первая часть (а естли можно и
другая) была совершенной квадратъ на пр 9 + 4,
положи 9 = a 4 = b ; потомъ сообразуясь съ
показанною въ предъидущемъ прибавленіи неопре-
дѣлен-

дѣленной степени $(a+b)^{\frac{1}{2}} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, изобрази данное количество безконечнымъ рядомъ степени $\frac{1}{2}$, который будетъ слѣдующій: $\sqrt{13}$
 $= (9+4)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} - \frac{1}{512} + \frac{1}{4096} \text{ и проч.})$
 $= 3 (1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1296} + \frac{1}{531441} \text{ и проч.}) = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27}$
 $+ \frac{1}{243} - \frac{1}{19683} + \text{и проч.} = 3\frac{166}{243} - \frac{172}{2187} = 3\frac{1322}{2187}$ есть искомоу корень; который безъ чувствительной погрѣшности принять можно совершеннымъ; ибо когда оной умножится самъ собою, то произведение $12\frac{445861}{4782989}$ отъ истиннаго квадрата 13, различествовать будетъ не болѣе какъ $\frac{37109}{4782989}$ или почти $\frac{1}{126}$ частію.

§ 104. Прибавлен. Равнымъ образомъ изобразить можно, безконечнымъ рядомъ корень третей степени, на примѣръ: изъ величины

$c+x$; ибо когда $\sqrt[3]{(c+x)} = (c+x)^{\frac{1}{3}}$, то по общему неопредѣленной степени изображенію, будетъ $n = \frac{1}{3}$; по сей причинѣ части предстоящихъ будутъ слѣдующія: $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{2}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{1}{4}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{25}$ и проч. изъ коихъ ежели съскавши показаннымъ (въ § 59) порядкомъ предстоящихъ, поставишь въ общемъ изображеніи; то неопредѣленная степень данного количества

изобразится такимъ образомъ: $\sqrt[3]{(c+x)} = (c+x)^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{x}{3c} - \frac{x^2}{9c^2} + \frac{5x^3}{81c^3} - \frac{10x^4}{243c^4} + \text{и проч.})$

$= \sqrt[3]{c} + \frac{1}{3} \frac{x}{c^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{9} \frac{x^2}{c^{\frac{5}{3}}} + \frac{5}{81} \frac{x^3}{c^{\frac{8}{3}}} - \frac{10}{243} \frac{x^4}{c^{\frac{11}{3}}} \text{ и проч.} =$

$\sqrt[3]{c} + \frac{x}{3\sqrt[3]{c^2}} - \frac{x^2}{9\sqrt[3]{c^5}} + \frac{5x^3}{81\sqrt[3]{c^8}} - \frac{10x^4}{243\sqrt[3]{c^{11}}} \text{ и проч. въ кото-}$

ромъ

ромъ ежели положимъ, что количество c будетъ совершенной кубъ, то есть на примѣръ:

$c = a.a.a = a^3$, то $\sqrt[3]{c} = a$; по сей причинѣ въ помянутомъ изображеніи уничтожатся всѣ коренные знаки, и для того будетъ $\sqrt[3]{(c+x)} = \sqrt[3]{(a^3+x)} = a + \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} + \frac{5x^3}{81a^8} - \frac{10x^4}{243a^{11}}$ и проч.

105. *Задача.* Помощію предвѣдущаго предложенія найди ближайшій корень куба изъ числа 10.

Рѣшен. Раздѣля данное число на двѣ части, такъ чтобы первая часть была совершенной кубъ, на примѣръ: $8+2=10$, представь себѣ что $c=a^3=8, x=2$, то будетъ $8+2=10=c$

$+x=a^3+x$, причемъ $\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a^3} = a = 2$. И такъ сообразуясь съ предписаннымъ неопредѣленной степени порядкомъ, изобрази $\sqrt[3]{(a^3+x)}$

$= \sqrt[3]{(8+2)}$ неопредѣленнымъ числомъ членовъ;

отъ чего произойдетъ $\sqrt[3]{(8+2)} = 8^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} - \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{64} + \frac{5}{81} \cdot \frac{8}{512} - \frac{10}{243} \cdot \frac{16}{4096} \text{ и проч.}) = 2 (1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} + \frac{5}{3456} - \frac{5}{33152} \text{ и проч.}) = 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} + \frac{5}{2592} - \frac{5}{33152} = 2 \frac{437}{2592} = 2 \frac{2401}{15552}$. Ежели сей корень умножится самъ собою два раза, то въ произшедшемъ отъ сего кубъ $9 \frac{3758892373153}{3761479878608}$, недостатокъ будетъ 2587503455 ; и такъ сей кубъ отъ истиннаго 10 разнится почти только $\frac{1}{1434}$ часпю.

Примѣчан. Посредствомъ предписаннаго правила, изображается безконечною строкою корень четвертой степени и проч. ежели только вмѣсто n поставиши $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ и проч. O

О разныхъ изчисленіяхъ извлекаемыхъ величинъ.

§ 106. Теорема. Извлекаемая величина не перемѣнилась, ежели показатель корня и показатель величины подъ знакомъ находящейся, чрезъ какое нибудь число умножился.

Доказат. Положимъ, что помянутыя показатели величины $\sqrt[n]{a^m}$, умножатся чрезъ 2, то будетъ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[2n]{a^{2m}} = \sqrt[n]{a^{2m}}$; ибо $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (§ 81), также $\sqrt[2n]{a^{2m}} = a^{\frac{2m}{2n}} = a^{\frac{m}{n}}$; слѣдовательно и $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[2n]{a^{2m}}$ (§ 30 Часть 1 я).

§ 107. Задача. Извлекаемые количества, имѣющія разныхъ коренныхъ показателей, привести къ одному показателю корня.

Рѣшен. I. Ежели даны будутъ двѣ извлекаемыя величины; то умножь коренного показателя и показателя величины подъ знакомъ находящейся перваго количества, показателемъ корня второй величины; а показателей коренного и величины подъ знакомъ находящейся втораго количества, показателемъ корня первой величины: то и будешь имѣть такія величины, кои имѣютъ одного коренного показателя и даннымъ количествомъ равныя. На примѣръ, дабы ве-

личины $\sqrt[2]{a}$ и $\sqrt[3]{b^2}$ привести къ одному показателю корня; то умножь показатели 2 и 1 первой величины a чрезъ 3; потомъ показатели 3 и 2 втораго количества b показателемъ

2 первой величины, отъ чего данныя количества изображены будутъ слѣдующимъ образомъ:

$$\sqrt[3]{a^{12}} = \sqrt[6]{a^3} \text{ и } \sqrt[3]{b^{12}} = \sqrt[6]{b^4}.$$

II. Ежели должно будетъ нѣсколько коренныхъ величинъ привести къ одному показателю корня: то надлежитъ кореннаго показателя, и показателя величины подъ знакомъ находящейся каждаго количества, умножить произведеніемъ коренныхъ показателей прочихъ величинъ, отъ чего произшедшія величины будутъ имѣть одного кореннаго показателя, на примѣръ: для приведенія къ одному показателю корня шрехъ величинъ $a\sqrt[n]{b^m}$, $c\sqrt[r]{d^s}$ и $V^x y^q$, умножь показатели n и m первой величины, произведеніемъ коренныхъ показателей второй и шрешней величины, то есть чрезъ rx ; потомъ показателей r и s второй величины, произведеніемъ n и x первой и шрешней величины; а напоследокъ показателей x и q шрешней величины произведеніемъ rn первой и второй величины; тогда данныя количества $a\sqrt[n]{b^m}$, $c\sqrt[r]{d^s}$ и $V^x y^q$ изобразятся слѣдующимъ образомъ: $a\sqrt[nrx]{b^{mrx}}$, $c\sqrt[nrx]{d^{srx}}$, и $\sqrt[nrx]{y^{qrn}}$, и будутъ равны даннымъ неизвласкомымъ количествамъ (§ 106).

§ 108. Задача. Не переменная коренной величины, поставитъ предстоящее подъ коренной знакъ.

Рѣшен. Возвысивъ предстоящее количество въ степень кореннаго показателя, припиши оную

оную къ величинѣ подѣ знакомѣ находящейся, получишь пребуемое изображение, на примѣръ:

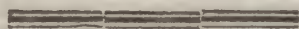
$b\sqrt[3]{d^2}$, возвысивъ предстоящее b въ третью степеиъ, поставь подѣ знакъ; будетъ $b\sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{b^3d^2}$; ибо $b\sqrt[3]{d^2} = bd^{\frac{2}{3}}$; также $\sqrt[3]{b^3d^2} = bd^{\frac{2}{3}}$, слѣдовательно и $b\sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{b^3d^2}$ (30. Часть I).

Равнымъ образомъ будетъ и величина $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 4} = \sqrt[3]{12}$; также $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\frac{4}{15}}$; и вообще $a\sqrt[n]{b^s} = \sqrt[n]{b^s a^n}$; ибо $a\sqrt[n]{b^s} = a \cdot b^{\frac{s}{n}}$, также $\sqrt[n]{b^s a^n} = b^{\frac{s}{n}} \cdot a^{\frac{n}{n}} = ab^{\frac{s}{n}}$.

109. Слѣдств. I Изъ сего удобно можно видѣть, что для переставки величины изъ подѣ кореннаго знака на мѣсто предстоящаго, надлежитъ раздѣлить показателя той величины (еслии будетъ можно) на показателя корня; а потомъ съ показателемъ частнаго поставивъ оное внѣ знака, на примѣръ: $\sqrt[n]{ad^s}$ будетъ $= d^{\frac{s}{n}}\sqrt[n]{a} = d^{\frac{s}{n}}\sqrt[n]{a}$; ибо $\sqrt[n]{ad^s} = d^{\frac{s}{n}}a^{\frac{1}{n}} = d^{\frac{s}{n}}a^{\frac{1}{n}} = d^{\frac{s}{n}}\sqrt[n]{a}$. Также коренная величина $\sqrt[n]{ad^s}$ будетъ $= d^{\frac{s}{n}}\sqrt[n]{a}$; ибо $\sqrt[n]{ad^s} = a^{\frac{1}{n}}d^{\frac{s}{n}} = d^{\frac{s}{n}}a^{\frac{1}{n}} = d^{\frac{s}{n}}\sqrt[n]{a}$.

Слѣдств. II. Изъ сего явствуетъ, что для уменьшенія величины, находящейся подѣ знакомѣ, числомъ изображенной, должно представивъ

себѣ оное число въ двухъ множителяхъ, изъ
коихъ бы одинъ составлялъ совершенную степе-
нь кореннаго показателя; а потомъ корень
сего множителя, поставивъ внѣ знака, а дру-
го оставивъ подъ кореннымъ знакомъ, на
примѣръ: $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 4\sqrt[4]{3}$; ибо поло-
жи $16 = a^2$, $3 = b$, гдѣ $a = 4$, то будетъ
 $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{a^2 b} = a\sqrt[4]{b} = 4\sqrt[4]{3}$, по
предъидущему предложенію. По той же причи-
нѣ $3\sqrt[3]{12} = 6\sqrt[3]{3}$; ибо $3\sqrt[3]{12} = 3\sqrt[3]{4 \cdot 3} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{3}$
 $= 6\sqrt[3]{3}$. Также $\sqrt[5]{\frac{5}{54}} = \frac{1}{3}\sqrt[5]{\frac{5}{8}}$; и $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{4}{5}ab} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{5}ab}$;
равнымъ образомъ $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4}ac} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4}ac} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3ac}$, и
прочая.



О сложеніи коренныхъ величинъ.

§ 110. Задача. Данные двѣ или больше
проспыхъ неизвлекаемыя величины сложить.

Рѣшен. Данные коренныя величины, соеди-
няя только всѣ вмѣстѣ подлежащими ихъ зна-
ками, какъ и проспыхъ алгебраическія величины,
получишь требуемую сумму, на примѣръ: сум-
ма коренныхъ величинъ $a\sqrt{d}$, и $c\sqrt{b}$ будетъ $=$
 $a\sqrt{d} + c\sqrt{b}$. Сумма количествъ $2\sqrt{a}$, и \sqrt{a} ,
сложъ предстоящихъ, будетъ $= 2\sqrt{a} + \sqrt{a} =$
 $3\sqrt{a}$; также сумма количествъ $2\sqrt[3]{d}$ и $3\sqrt[3]{d}$
будетъ $= 2\sqrt[3]{d} + 3\sqrt[3]{d}$; или по приведеніи къ
одному коренному показателю, сумма сихъ ко-
личествъ $2\sqrt[3]{d} + 3\sqrt[3]{d}$, будетъ $= 2\sqrt[6]{d^3} +$
 $3\sqrt[6]{d^3}$: Также и сумма величинъ $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{2}$
бу-

будетъ $= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$; также сумма величинъ $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; но сумма величинъ $5\sqrt{3}$, и $- 3\sqrt{3}$ будетъ $= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

§ III. Прибавлен. Посредствомъ сего правила также складывающіяся и сложныя величины, какъ изъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{r} 3 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ \hline 4 + 2\sqrt{2} = \text{сумм.} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{5} + \sqrt{3} \\ 4\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \\ \hline 7\sqrt{5} - \sqrt{3} = \text{сумм.} \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r} 3a\sqrt{b} + 2\sqrt{3} - 7\sqrt{c} \\ - 2a\sqrt{b} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{c} \\ \hline 7a\sqrt{b} + 4\sqrt{3} - \sqrt{c} \\ \hline 8a\sqrt{b} + \sqrt{3} - 5\sqrt{c} \end{array}$$

Примѣръ IV.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}a} + \frac{5}{3}a\sqrt{7b} + \frac{4}{3}c\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \frac{6}{5}\sqrt{\frac{1}{2}a} - 3\sqrt{7a^2b} + \frac{5}{3}c\sqrt{\frac{4}{3}} \\ \hline \frac{28}{15}\sqrt{\frac{1}{2}a} - \frac{4}{3}a\sqrt{7b} + 3c\sqrt{\frac{1}{3}} \quad *) \end{array}$$

О вычитаніи коренныхъ величинъ.

§ II2. Задача. Простую неизвлекаемую величину вычести изъ другой.

Рѣшен. Перемѣня знакъ вычитаемого количества въ проптивной, припиши оное къ тому

Ж 3 коли-

*) Ибо величина $- 3\sqrt{7a^2b} = - 3a\sqrt{7b}$; по сему $\frac{5}{3}a\sqrt{7b} - 3a\sqrt{7b} = - \frac{4}{3}a\sqrt{7b}$; также и $\frac{5}{2}c\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{5}{2}c\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{5}{2}c\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}c\sqrt{\frac{1}{3}}$, следовательно $\frac{4}{3}c\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{5}{3}c\sqrt{\frac{1}{3}} = 3c\sqrt{\frac{1}{3}}$.

количеству, изъ котораго вычестъ должно; получишь пребуемую разность, на примѣръ: изъ коренной величины $\sqrt[3]{b}$ вычестъ \sqrt{c} , разность будетъ $\sqrt[3]{b} - \sqrt{c}$. Равнымъ образомъ разность величинъ $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$, будетъ $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$; или по приведеніи къ одинакому коренному показателю, разность сихъ количествъ $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$ будетъ $\sqrt[6]{25} - \sqrt[6]{27}$. Ежели коренныя величины будутъ одинакія, то предстоящее большаго количества вычти изъ предстоящаго меньшаго, какъ и простыхъ алгебраическихъ величинъ, на примѣръ: разность величинъ $3\sqrt{a}$ и \sqrt{a} , будетъ $3\sqrt{a} - \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$; но ежели должно будетъ изъ $5\sqrt{bc}$ вычестъ величину $-2\sqrt{ab}$, то разность ихъ будетъ $5\sqrt{bc} + 2\sqrt{ab}$.

Посредствомъ сихъ правилъ вычитаются и сложныя величины, перемѣняя знаки вычитаемаго количества въ противныя, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{5} + 5\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} - \sqrt[3]{5} - 2\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{2} - \sqrt[3]{5} + 7\sqrt{3} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} 4a^2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[4]{c} - 3\sqrt{5} \\ - 3a^2\sqrt[3]{b} - 2\sqrt[4]{c} + 5\sqrt{5} \\ \hline 7a^2\sqrt[3]{b} + 4\sqrt[4]{c} - 8\sqrt{5} \end{array}$$

При-

Примѣръ III.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{cb^3} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}b} \\ & \sqrt[3]{\frac{1}{8}a^2c} + \sqrt[3]{\frac{1}{3}b \sqrt{cb}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{6}b} \\ \hline & \sqrt[3]{\frac{1}{2}a} \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{1}{3}b \sqrt{bc}} - 6\sqrt[3]{\frac{1}{6}b}. \end{aligned}$$

Здѣсь въ количествѣ, изъ котораго другое вычитается, $\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{\frac{1}{8}c} = \sqrt[3]{\frac{10}{8}a} \sqrt[3]{\frac{1}{8}c} = 5a \sqrt[3]{\frac{1}{8}c}$.
 $\sqrt[3]{cb^3} = \sqrt[3]{b} \sqrt[3]{cb}$; и $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}b} = -\sqrt[3]{\frac{1}{6}b} = -\sqrt[3]{\frac{1}{6}b} = 4\sqrt[3]{\frac{1}{6}b}$;
 а въ вычитаемомъ количествѣ $\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^2c} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}a} \sqrt[3]{\frac{1}{8}c}$,
 по перемѣнѣ коихъ сдѣлано вычитаніе.

О умноженіи коренныхъ величинъ.

§ III. Задача. Данную коренную величину умножить другою.

Рѣшен. I. Ежели данныя величины будутъ имѣть одинакихъ показателей корня, то умножь предстоящее одной величины на предстоящее другой, и количество находящееся подъ знакомъ первой величины, на количество другой; получишь требуемое произведеніе, на примѣръ: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; также $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$. и $a \sqrt[3]{b} \times c \sqrt[3]{d} = ac \sqrt[3]{bd}$. Произведеніе двухъ величинъ $2\sqrt{4} \times 3\sqrt{9} = 6\sqrt{36} = 6 \times 6 = 36$. Равнымъ образомъ $a \sqrt[5]{b^2} \times \sqrt[5]{c} = a \sqrt[5]{b^2c}$; и $a \sqrt[p]{p^m} \times c \sqrt[q]{q \times d} \sqrt[y]{y^3} = acd \sqrt[pqy]{p^m q y^3}$; и напоследокъ $\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{c^3} \times \sqrt[3]{d} \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ad} \sqrt[3]{c^3b}$.

II. Когда коренные показатели будутъ разные; то приведя ихъ къ одному коренному показателю, и умноживъ одну величину другою, какъ въ первомъ случаѣ показано, получишь требуемое произведение, на примѣръ: $2a\sqrt[3]{b^2}$ умножишь чрезъ $c\sqrt[3]{d}$, по приведеніи коихъ къ одному коренному показателю будетъ $2a\sqrt[3]{b^2} = 2a\sqrt[6]{b^4}$, и $c\sqrt[3]{d} = c\sqrt[6]{d^2}$. И такъ произведение $2a\sqrt[3]{b^2} \times c\sqrt[3]{d}$ будетъ $= 2a\sqrt[6]{b^4} \times c\sqrt[6]{d^2} = 2ac\sqrt[6]{b^4d^2}$. Произведение двухъ количествъ $2\sqrt[3]{3}$, и $3\sqrt[3]{4}$, по приведеніи къ одному коренному показателю, будетъ $2\sqrt[3]{27} \times 3\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[3]{432}$. Также $a\sqrt[3]{b^3} \times 2c\sqrt[3]{d^2} = a\sqrt[6]{b^3} \times 2c\sqrt[6]{d^2} = 2ac\sqrt[6]{b^3d^2}$.

§ 114. Прибавлен. Произведение невозможныхъ количествъ $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ будетъ $= -\sqrt{a^2} = -a$; ибо $-a$ есть квадратъ величины $\sqrt{-a}$ (§ 113). И такъ дабы не обмануться въ умноженіи невозможныхъ количествъ, на примѣръ: $\sqrt{-b}$ чрезъ $\sqrt{-1}$, гдѣ произведение будетъ $-\sqrt{b}$, то должно представить себѣ, что $\sqrt{-b} = \sqrt{-1} \cdot b = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}$; посему $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} = -1 \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{b}$; ибо $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ (§ 113). Также $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = -\sqrt{bc}$; ибо $\sqrt{-b} = \sqrt{-1} \cdot b = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{-c} = \sqrt{-1} \cdot c = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{c}$, посему $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = -\sqrt{bc}$.

$=\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = -1\sqrt{bc} = -\sqrt{bc}$;
 которое по обыкновенному умноженію $\sqrt{-b} \times$
 $\sqrt{-c} = \sqrt{bc}$ будетъ неправильное произве-
 деніе.

§ 115 Примѣчан. Если коренную величину дол-
 жно будетъ умножить цѣлымъ числомъ, то умножается
 одно только предполагаемое цѣлымъ количествомъ, на прим:
 $a\sqrt{b^3} \times c = ac\sqrt{b^3}$; ибо коренная величина $a\sqrt{b^3}$ со-
 сколько разъ увеличивается, столько количество c въ
 себѣ единицъ заключаетъ ; также и $2\sqrt[3]{c} \times 3 = 6\sqrt[3]{c}$.

Помощію предписанныхъ предложеній умно-
 жающихся и сложныхъ величины, какъ изъ слѣдую-
 щихъ примѣровъ видно :

Примѣръ I.

$$\begin{array}{r} 4 + 2\sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \\ \hline 8 + 4\sqrt{2} \\ - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{4} = -4 \\ \hline 8 - 4 = 4 \text{ произв.} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} 2a\sqrt{b} + c \\ 3\sqrt{b} + 2c \\ \hline 6a^2b + 3ac\sqrt{b} \\ + 4ac\sqrt{b} + 2c^2 \\ \hline 6a^2b + 7ac\sqrt{b} + 2c^2 \text{ произв.} \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r} 3a + \sqrt{(2a + \sqrt{b})} \\ 2a - \sqrt{(2a + \sqrt{b})} \\ \hline 6a^2 + 2a\sqrt{(2a + \sqrt{b})} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6a^2 + 2a\sqrt{(2a+\sqrt{b})} \\ - 3a\sqrt{(2a+\sqrt{b})} - 2a - \sqrt{b} \end{array}$$

$$6a^2 - \sqrt{(2a+\sqrt{b})} - 2a - \sqrt{b} \text{ произв.}$$

Примѣръ IV.

$$2\sqrt{b} + 3c\sqrt{2} - 5\sqrt{ab}$$

$$3\sqrt{b} - 4c\sqrt{2} + 5\sqrt{ab}$$

$$6b + 9c\sqrt{2b} - 15b\sqrt{a}$$

$$- 8c\sqrt{2b} - 24c^2 + 20c\sqrt{2ab}$$

$$+ 10b\sqrt{a} + 15c\sqrt{2a^3} - 25ab$$

$$6b + c\sqrt{2b} - 5b\sqrt{a} + 35c\sqrt{2ab} - 24c^2 - 25ab$$

Примѣръ V.

$$\left. \begin{array}{l} 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{8} \\ 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{4} \end{array} \right\} (9 \ 107)$$

$$4\sqrt[6]{243} + 2\sqrt[6]{216} - 2\sqrt[6]{36} - \sqrt[6]{32}$$

Примѣръ VI.

$$\frac{3}{4}\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt[4]{2} - 3\sqrt[4]{3}$$

$$\frac{3}{4} + 2\sqrt[4]{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{5}} - \frac{5}{4}\sqrt[4]{6} - 6\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{\frac{3}{5}} \text{ произв.}$$

Примѣръ VII.

Примѣръ VIII.

$$\sqrt{-2} + \sqrt{a}$$

$$2a\sqrt{-1} + \sqrt{-b}$$

$$\sqrt{-2} - \sqrt{a}$$

$$- 2a\sqrt{-1} - \sqrt{-b}$$

$$- 2 + \sqrt{-2a}$$

$$4a^2 + 2a\sqrt{b} *)$$

-V

$$*) \text{ Ибо } -2a \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-b} = -2a \times \sqrt{b} = +2a\sqrt{b}.$$

$$\frac{-\sqrt{-2a-a}}{-2-a \text{ произ.}} \quad \frac{+2a\sqrt{b+b*})}{4a^2+4a\sqrt{b+b} \text{ произ.}}$$

О дѣленіи коренныхъ величинъ.

§ II6. Задача. Данную коренную величину раздѣлить на другую.

Рѣшен. I. Если данныя количества будутъ имѣть одинакихъ коренныхъ показателей, то раздѣля предстоящее дѣлимаго на предстоящее дѣлителя, и количество подѣ знакомъ дѣлимаго на количество подѣ знакомъ дѣлителя, получишь требуемое частное, на примѣръ: ежели величина $a\sqrt{b}$ раздѣлится на $c\sqrt{d}$, то частное будетъ $\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$; также $6\sqrt{12}$ раздѣленное на $3\sqrt{3}$ въ частномъ даетъ $\frac{6}{3}\sqrt{\frac{12}{3}}=2\sqrt{4}=4$. Опъ раздѣленія $4\sqrt{10}$ на $2\sqrt{5}$ въ частномъ будетъ $\frac{4}{2}\sqrt{\frac{10}{5}}=2\sqrt{2}$; также и $a^2\sqrt{b^2}$ раздѣленное на $2a\sqrt{b}$ въ частномъ $\frac{1}{2}a\sqrt{b^2}=\frac{1}{2}b$. Равнымъ образомъ и опъ раздѣленія $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}b}$ на $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}c}$ частное будетъ $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4b}{3c}}=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}bc}$. Также ежели $4b^2\sqrt{c}$ раздѣлится на $2b$, то частное будетъ $2b\sqrt{c}$; ибо $2b\sqrt{c} \times 2b = 4b^2\sqrt{c}$.

II. Еслили данныя величины будутъ имѣть разныхъ коренныхъ показателей, то приведя ихъ къ одинакому коренному показателю, раздѣли одну величину на другую, какъ въ первомъ рѣшеніи

*) Поелику $-\sqrt{-b}=-1.\sqrt{-b}$, по сей причинѣ $2ax$
 $-1.\sqrt{b} \times \sqrt{-1}=-2ax-1.\sqrt{b}=-2ax-1.\sqrt{b}$

ніи показано, будешь имѣшь частное количество, на примѣръ: величину $4\sqrt{b}$ раздѣлишь на $2\sqrt[n]{c}$, по приведя ихъ къ одному коренному показателю $4\sqrt[n]{b^3}$, и $2\sqrt[n]{c^2}$, раздѣли одно на другое, частное будетъ $= 2\sqrt[n]{\frac{b^3}{c^2}}$. Также ежели $a\sqrt[m]{b}$ раздѣлишь на $c\sqrt[n]{p}$, то по приведеніи къ одному коренному показателю $a\sqrt[mn]{b^n}$, и $c\sqrt[mn]{p^m}$ частное будетъ $= \frac{a}{c}\sqrt[mn]{\frac{b^n}{p^m}}$.

Помощію сихъ правилъ дѣлается и сложныя величины, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{r} \sqrt{6} + 2\sqrt{2} \left| \begin{array}{l} \sqrt{48} + 2\sqrt{16} - 4\sqrt{18} - 8\sqrt{6} \\ \sqrt{48} + 2\sqrt{16} \end{array} \right| \sqrt{8} - 4\sqrt{3} \\ \hline -4\sqrt{18} - 8\sqrt{6} \\ \hline -4\sqrt{18} - 8\sqrt{6} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{частн.} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} (2a + 3c\sqrt{b^3}) 4a^2 + 2ac\sqrt{b^3} - 6c^2b^3 \quad (2a - 2c\sqrt{b^3}, \text{ частн.}) \\ 4a^2 + 6ac\sqrt{b^3} \\ \hline -4ac\sqrt{b^3} - 6c^2b^3 \\ \hline -4ac\sqrt{b^3} - 6c^2b^3 \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r} (2a\sqrt{-1} + \sqrt{-b}) 4a^2 + 4a\sqrt{b} + b \quad (-2a\sqrt{-1} - \sqrt{-b}, \text{ частное.}) \\ 4a^2 + 2a\sqrt{b} \\ \hline 2a\sqrt{b} + b \\ \hline 2a\sqrt{b} + b \end{array}$$

При-

Примѣръ IV.

$$\frac{\sqrt[2]{\frac{1}{3}b} \sqrt[1]{c} - 2\sqrt[1]{\frac{1}{3}b^2} + \sqrt[2]{\frac{1}{3}b} \sqrt[1]{\frac{5c}{b}} - 3\sqrt[1]{\frac{5}{3}b} + \sqrt[1]{\frac{5}{2}}}{\sqrt[1]{\frac{1}{2}c}} \quad \text{част.}$$

$$-2\sqrt[1]{\frac{1}{3}b^2}$$

$$-2\sqrt[1]{\frac{1}{3}b^2}$$

$$\sqrt[2]{\frac{1}{3}b}$$

$$\sqrt[2]{\frac{1}{3}b}$$

Примѣчан. Хотя отъ раздѣленія $3+2\sqrt{2}$ на $1+\sqrt{2}$, частное будетъ $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, однакожь оное сокращить можно слѣдующимъ образомъ: умножь числителя и знаменателя сего частнаго на $1-\sqrt{2}$, по естъ знаменателемъ (перемѣня знакъ втораго члена въ прошивной), будетъ $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$; умножь еще числителя и знаменателя на -1 , будетъ $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1} = \sqrt{2}+1$
 $= \frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$

Также ежели $8-5\sqrt{2}$ раздѣлится на $3-2\sqrt{2}$, по въ частномъ $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ помножь числителя и знаменателя чрезъ $3+2\sqrt{2}$, будетъ $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \times \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{2}}{9-8} = 4+\sqrt{2} =$ частному $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}.$

§ 117. Задача. Данную коренную величину возвысить въ какую нибудь степень.

Рѣшен. I. Для возвышенія коренной величины въ какую нибудь степень, должно показателя каждой

каждой величины, подъ знакомъ находящейся, умноживъ показателемъ предложенной степени,

на примѣръ: $\sqrt[n]{a}$ возвысимъ въ пятую степень,

будетъ $(\sqrt[n]{a})^5 = \sqrt[n]{a^5} = a$. Третья степень

величины $\sqrt[n]{bd}$, будетъ $\sqrt[n]{b^3d^3} = b^{\frac{3}{n}}d^{\frac{3}{n}}$. Степень

m величины $\sqrt[n]{a^r}$ будетъ $\sqrt[n]{a^{rm}}$; ибо $\sqrt[n]{a^r} =$

$a^{\frac{r}{n}}$; но при возвышеніи сей послѣдней величины

въ степень m , показатель $\frac{r}{n}$ умножается чрезъ

m (§ 56, сл. 2), слѣдовательно степень m вели-

чины $a^{\frac{r}{n}}$ будетъ $a^{\frac{rm}{n}} = \sqrt[n]{a^{rm}}$.

II. Ежели коренная величина будетъ имѣть предъ собою предстоящее, то надлежитъ и оное возвысить въ предложенную степень; или прежде поставивъ оное подъ коренной знакъ (§ 108), а потомъ изображенное такимъ образомъ количество возвысить въ пребуемую степень, какъ въ первомъ рѣшеніи показано, на примѣръ:

$(a\sqrt[3]{c^2})^2 = a^2\sqrt[3]{c^4} = a^2c\sqrt[3]{c}$; или переставя предстоящее подъ коренной знакъ, будетъ

$(a\sqrt[3]{c^2})^2 = (\sqrt[3]{a^2c^2})^2 = \sqrt[3]{a^6c^4} = a^2c\sqrt[3]{c}$. Так-

же $(2\sqrt[4]{4})^2 = 4\sqrt[4]{16} = 4.4 = 16$; поелику впо-

рая степень числа $4 = 16$. Изъ сего видно, что предстоящее a также и 2 можетъ быть переставлено подъ знакъ или прежде или послѣ дѣйствія.

Слѣдств. Изъ сего видно, когда показатель пребуемой степени равенъ показателю корня;

то

то въ такомъ случаѣ опинимается только опъ
данной величины коренной знакъ, на примѣрѣ:
третья степень величины $\sqrt[3]{b^2} = (\sqrt[3]{b^2})^3 =$
 $\sqrt[3]{b^6} = b^2$. Равнымъ образомъ четвертая степень
величины $2\sqrt[4]{b^3} = (2\sqrt[4]{b^3})^4 = 16\sqrt[4]{b^{12}} = 16b^3$
 $= 16b^3$. Также степень n величины $a\sqrt[n]{b^2} =$
 $a^n\sqrt[n]{b^{2n}} = a^n b^2 = a^n b^2$.

§ 119. Задача. Изъ предложенной коренной
величины извлечь корень какой нибудь сте-
пени.

Рѣшен. I. Для извлеченія какого нибудь кор-
ня изъ кореннаго количества, котораго пред-
стоящее единица, умножь кореннаго показателя
показателемъ извлеченія, получишь пребуемой
корень, на примѣрѣ: извлечь корень пятой
степени изъ $1\sqrt[5]{a^{15}}$, то умноживъ кореннаго
показателя чрезъ 5, будетъ $\sqrt[5]{a^{15}} = a =$
 $\sqrt[5]{\sqrt[5]{a^{15}}}$; ибо $\sqrt[5]{a^{15}} = a^3$, а корень пятой степени
изъ $a^3 = \sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}} = a$. По сей причинѣ корень
второй степени изъ $\sqrt{a^4} = \sqrt[4]{a^4} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{a^4}}$
также корень степени n изъ $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{a^r}$.

II. Еслили у коренной величины предсто-
ящее совершенная степень пребуемаго корня, то
сыскавъ изъ онаго желаемой корень, поставь его
предъ произведенною по первому рѣшенію корен-

ною

ною величиною, получишь искомой корень, на
 примѣрѣ: корень квадрата изъ $9\sqrt[3]{5}$ будетъ
 $= 3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{9\sqrt[3]{5}}$. Также корень квадрата изъ
 $4\sqrt[3]{64} = 2\sqrt[3]{64} = 2 \times 2 = 4$; ибо $4\sqrt[3]{64} = 4 \cdot 4$
 $= 16$, а квадратной корень сего числа $= \sqrt{16}$
 $= 4$. Но ежели предстоящее совершеннаго корня
 въ себѣ не заключаетъ, то переставя оное
 подъ коренной знакъ, сдѣлай рѣшеніе по перво-
 му случаю, на примѣрѣ: корень квадрата изъ
 $3\sqrt[3]{2}$ то будетъ $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$, коего
 квадратной корень $\sqrt{\sqrt[3]{54}} = \sqrt[6]{54}$. Также ко-
 рень третьей степени изъ $\sqrt[3]{b^3}$ будетъ $=$
 $\sqrt[6]{a^2 b^3}$, и прочая.

Правило. На § 118 и 119. Ежели потребно будетъ
 имѣть какую нибудь степень или корень изъ кореннаго ко-
 личества, изображеннаго дробью, то съ числителемъ и зна-
 менателемъ предстоящаго и съ количествомъ подъ зна-
 комъ находящагося, надлежитъ производить подобныхъ
 дѣйствія, какія показаны были о цѣлыхъ числахъ.

О уравненіяхъ первой степени и о различ- ныхъ рѣшеніяхъ сей степени вопросовъ.

§ 120. Опредѣл. Два какія нибудь равныя ко-
 личества, соединенныя знакомъ $=$, называющіяся
 уравненіе, на примѣрѣ: $8 + 2 = 10$ или $a + b$
 $= dx$. Количество, по лѣвую сторону знака на-
 писанное, именуется *первою частію*, а по правую
 сторону находящееся, *второю частію уравненія*.

Приба-

Прибавлен. Уравненіе есть дѣйствіе, чрезъ которое посредствомъ извѣстныхъ количествъ находится одна или нѣсколько неизвѣстныхъ величинъ, въ уравненіи заключающихся.

§ 121. **Опредѣл.** Уравненіе первой степени есть то, въ которомъ показатель неизвѣстной буквы $= 1$; еслилижъ показатель помянутой буквы $= 2$, такое уравненіе именуется второй степени и такъ далѣе.

§ 122. **Положен.** Извѣстныя количества въ уравненіяхъ означаются первыми азбучными буквами, a, b, c, d и проч.; а неизвѣстныя послѣдними x, y, z , на примѣръ: въ уравненіяхъ $y + x = d + c$, $y = b + a$ (которыя первой степени), также $x^2 - x = a$, и $x^2 + y^2 = d$ (кои второй степени), неизвѣстныя количества суть x и y .

Главный предметъ уравненія состоитъ въ томъ, чтобы неизвѣстное количество, какъ бы оно смѣшано ни было съ извѣстными, находилось въ одной а всѣ извѣстныя величины въ другой части уравненія; чрезъ что уже неизвѣстное количество дѣйствительно и найдено будетъ.

Примѣчаніе. Извѣстныя количества съскиваются чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени и чрезъ извлеченіе корней, какъ-то изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

I. Пусть будетъ уравненіе $x - a = b$, гдѣ a и b означаютъ извѣстныя величины, какія бы

онѣ ни были. Въ семъ уравненіи, придавъ къ обѣмъ частямъ количество a , получишь уравненіе $x = b + a$ (Частъ I § 33), которое опредѣляетъ намъ величину буквы x .

II. Ежели $x + c = bd$, то вычти изъ обѣихъ частей уравненія количество c , будетъ $x = bd - c$ (Частъ I. § 34.), что означаетъ величину x .

III. Когда уравненіе будетъ $c - b - x = d - 2x$: то придай къ обѣмъ частямъ сперва $2x$, будетъ $2x - x + c - b = d$, или $x + c - b = d$; потомъ придай b , выйдетъ $x + c = d + b$; наконецъ вычти изъ каждой части c , будетъ $x = d + b - c$.

§ 123. Слѣдств. Изъ сихъ примѣровъ выводится общее правило, что величины изъ одной части уравненія переспавляются въ другую съ противными знаками, то есть $+$ перемѣняется въ $-$, а $-$ въ $+$, на примѣръ: въ уравненіи $2x - b = d - c + x$, неизвѣстная буква x найдется слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rcl}
 & 2x - b = d - c + x & \\
 \text{придай} & b = b & \\
 \hline
 \text{будетъ} & 2x = b + d - c + x & \\
 \text{вычти} & x = x & \\
 \hline
 \end{array}$$

останется, $2x - x = x = b + d - c$, гдѣ величина $-x$ переспавлена изъ первой части уравненія въ другую съ противнымъ знакомъ, то есть $+$ въ $-$; а количество $+x$ изъ второй части, перенесено въ первую со знакомъ $-x$. Сіе правило для сокращенія дѣйствія во всѣхъ уравненіяхъ соблюдать должно.

IV. Если уравнение будетъ $\frac{x}{a}=b$, то неизвѣстная буква x найдется чрезъ умноженіе; ибо умноживъ обѣ части уравненія чрезъ a , получишь $x=ab$ (Часть I. § 35.)

V. Въ уравненіи $bx=d$ неизвѣстное количество x сыщется чрезъ дѣленіе; ибо раздѣля обѣ части уравненія на b , выйдетъ $x=\frac{d}{b}$ (Часть I. § 36.)

VI. Когда уравненіе будетъ $\sqrt{x}=a+b$, то возвысь обѣ части уравненія во вторую степень, будетъ $\sqrt{x^2}=a^2+2ab+b^2$ (§ 117 и 59.) то есть $x=a^2+2ab+b^2$.

VII. Въ уравненіи $x^2=cd$ неизвѣстное количество x найдется, когда изъ обѣихъ частей уравненія извлечется квадратной корень, то есть $\sqrt{x^2}=\sqrt{cd}$, гдѣ будетъ $x=\sqrt{cd}$.

Помощію сихъ общихъ правилъ сыскивается во всякомъ уравненіи неизвѣстная буква, какъ изъ слѣдующихъ вопросовъ видно:

Задача. I. Въ данномъ уравненіи $ab+nx=a^2-cx-n^2+nx$ найди неизвѣстное количество x .

Рѣшен. Сперва перенеси неизвѣстныя количества въ первую часть, а извѣстныя въ другую съ прошивными знаками, получишь новое уравненіе $nx-nx+cx=a^2-n^2-ab$ (§ 123), по сокращеніи котораго будетъ $cx=a^2-n^2-ab$, которое раздѣля на c , найдется $x=\frac{aa-nn-ab}{c}$.

Примѣчан. Изъ сего явствуетъ, что ежели одинакія и рѣзныя величины будутъ находиться въ обѣхъ частяхъ уравненія съ одинаковыми знаками, то онѣ одна другую уничтожаютъ, какъ здѣсь ях.

Задача. II. Въ уравненіи $ax - b = a^2 - cx - m$ сыскашь неизвѣстную величину x .

Рѣшен. Перенеся количества изъ одной части въ другую, какъ и прежде, съ прошивными знаками, будетъ $ax + cx$, или $(a + c).x = a^2 + b - m$; въ которомъ по раздѣленіи обѣихъ частей на $a + c$, найдется $x = \frac{aa + b - m}{a + c}$.

Задача. III. Въ уравненіи $b = \frac{aaa}{x} + c^2 - n$ найши неизвѣстную величину x .

Рѣшен. Умножь обѣ части уравненія чрезъ x , будетъ $b x = a^3 + c^2 x - n x$, въ коемъ переставя величины изъ одной части въ другую съ прошивными знаками, выйдетъ $b x + n x - c^2 x$ или $(b + n - c^2).x = a^3$, наконецъ раздѣля каждую часть уравненія на $b + n - c^2$, найдется $x = \frac{aaa}{b + n - c^2}$.

Задача. IV. Въ данномъ уравненіи $\frac{an - cc}{b} = \frac{nn + xm}{c}$ найши величину неизвѣстной буквы x .

Рѣшен. Умножь сперва обѣ части уравненія на b , будетъ $an - c^2 = \frac{bnn + bmx}{c}$; потомъ умножь на c , выйдетъ $acn - c^3 = bn^2 + bmx$, *) въ которомъ

*) Или все равно, что первая часть умножится чрезъ c , а вторая чрезъ b .

поромъ по перенесеніи bn^2 въ первую часть съ прошивнымъ знакомъ, будетъ $asn - c^3 - bn^2 = bmx$, а по раздѣленіи на bm найдется $x = \frac{asn - c^3 - bn^2}{bm}$.

Задача V. Въ уравненіи $4x - \frac{6}{5} = 3x + 5$, выскажь неизвѣстную величину x .

Рѣшен. Наблюдая предписанныя правила, сей вопросъ рѣшить уже не трудно, какъ слѣдуетъ:

$$4x - \frac{6}{5} = 3x + 5.$$

Перест. велич. $4x - 3x = 5 + \frac{6}{5}$, то есть $x = 5 + \frac{6}{5} = 6\frac{1}{5}$.

Задача VI. Въ данномъ уравненіи $\frac{xx+ax-cx}{3} = n^2x - bx^2 - mx$ найди неизвѣстную величину x .

Рѣшен. Неизвѣстная величина x сыщется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{xx+ax-cx}{3} = n^2x - bx^2 - mx.$$

умножь на 3 = 3.

$$\text{будетъ } x^2 + ax - cx = 3n^2x - 3bx^2 - 3mx.$$

раздѣли на $x = x$.

$$\text{будетъ } x + a - c = 3n^2 - 3bx - 3m.$$

$$x + 3bx \text{ или } (1 + 3b).x = 3n^2 + c - 3m - a.$$

$$\text{по разд. на } 1 + 3b, \text{ будетъ } x = \frac{3n^2 + c - 3m - a}{1 + 3b}.$$

Задача VII. Въ уравненіи $ax - \frac{3bx}{2a} + 2c = 3abc - \frac{5bcx}{a}$ найди неизвѣстную величину x .

Рѣшен. Сперва каждую часть уравненія приведи въ дробь, будетъ $\frac{ax - bx - 4ac}{2d} = \frac{abcd - bcd}{d}$, потомъ умножь первую часть уравненія чрезъ d , а вторую чрезъ $2a$, выйдетъ $2a^2dx - 3bdx + 4acd = 6a^2bcd - 10abdx$ (Задача IV), въ которомъ переставя величины изъ одной части въ другую съ проптивными знаками, будетъ $2a^2dx + 10abdx - 3bdx$, или $(2a^2d + 10abd - 3bd) \cdot x = 6a^2bcd - 4acd$, откуда найдется $x = \frac{6a^2bcd - 4acd}{2aad + 10abd - 3bd}$.

Задача. VIII. Въ данномъ уравненіи $2a\sqrt{bx-x} = a+b$ найти неизвѣстную величину x .

Рѣшен. Раздѣли сперва обѣ части уравненія на $2a$, будетъ $\sqrt{bx-x} = \frac{a+b}{2a}$; потомъ возвысь каждую часть во вторую степень, выйдетъ $bx-x$, или $(b-1) \cdot x = \frac{aa + 2ab + bb}{4aa}$; а по раздѣленіи на $b-1$ найдется $x = \frac{aa + 2ab + bb}{4aa(b-1)}$.

Задача IX. Найти два числа, коихъ сумма $= a$, а разность $= b$.

Рѣшен. Пусть большее число $= x$, то меньшее будетъ $= x - b$, и по обстоятельству вопроса должно быть $a = x + x - b = 2x - b$, въ которомъ перенеся величину $-b$ въ первую часть уравненія, будетъ $a + b = 2x$, а по раздѣленіи на 2 , выйдетъ большее число $x = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; потомъ вычти изъ сего большаго количества

раз-

разность b , будетъ $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ — меньшему количеству. И такъ положимъ, что $a = 100$, $b = 30$, то большее число $x = \frac{100}{2} + \frac{30}{2} = 50 + 15 = 65$; а меньшее $= \frac{100}{2} - \frac{30}{2} = 50 - 15 = 35$.

Слѣдетъ Изъ сего видно, что большее количество равно половинѣ суммы съ половиною разности, а меньшее равно половинѣ суммы безъ полуразности; слѣдственно ежели изъ большаго числа вычтемъ полусуммы, то останется половина разности, также и полусуммы безъ меньшаго равно той же половинѣ разности двухъ количествъ.

Задача. X. Сыскавъ число, къ которому ежели придано будетъ 56, то сумма будетъ впрое больше искомаго числа.

Рѣшен. Положимъ, искомое число $= x$, и $56 = a$, то по условію вопроса будетъ $x + a = 3x$, въ которомъ вычтя изъ обѣихъ частей x , выйдетъ $a = 3x - x = 2x$, а по раздѣленіи на 2, найдемся $x = \frac{a}{2} = \frac{56}{2} = 28$; къ которому ежели придастся 56, то будетъ $28 + 56 = 84 = 28 \times 3$.

Задача. XI. Сыскавъ два числа, коихъ разность 4, а разность ихъ квадратовъ 112.

Рѣшен. Положимъ $4 = a$, $112 = b$, меньшее число $= x$, то по силѣ вопроса, большее число будетъ $x + a$, и $(x + a)^2 - x^2 = b$, то есть $x^2 + 2ax + a^2 - x^2$ или $2ax + a^2 = b$; въ которомъ перенеся a^2 изъ первой части во вторую, будетъ $2ax = b - a^2$, а по раздѣленіи на $2a$, выйдетъ $x = \frac{b - aa}{2a} = \frac{112 - 16}{8} = 12$ — меньшему чи-

слу, къ коему ежели придастся разность a ,
то найдется большее число $= a + \frac{b-a}{2a}$
 $= \frac{2aa + b - aa}{2a} = \frac{aa + b}{2a} = \frac{16 + 112}{8} = 16.$

Задача XII. Число 50 раздѣлить на двѣ
части такъ, чтобы $\frac{3}{4}$ одной съ $\frac{5}{8}$ другой соспа-
вляли число 40.

Рѣшен. Положимъ $a=50$, $b=40$, меньшее
число x , большее $= a - x$; по по обстоятель-
ству вопроса будетъ $\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}(a-x) = b$, то есть
 $\frac{3x}{4} + \frac{5a-5x}{8} = b$, въ которомъ приведя первую
часть къ одному знаменателю, будетъ
 $\frac{18x + 20a - 20x}{24} = b$, а умножа каждую часть
чрезъ 24, выйдетъ $18x + 20a - 20x = 24b$, или
по сокращеніи $20a - 2x = 24b$, въ которомъ бу-
детъ $20a - 24b = 2x$, а по раздѣленіи на 2,
найдется $x = 10a - 12b = 500 - 480 = 20$, и $50 - 20$
 $= 30 =$ большому числу. И такъ $\frac{3}{4} \times 20 = 15$,
и $\frac{5}{8} \times 30 = 25$, коихъ сумма $= 40$.

Задача XIII. Три челоѣка вообще полу-
чили 112 рубл. изъ коихъ второй получилъ 8
рубл. больше перваго, а третій столько,
сколько досталось первому и второму; спраши-
вается, сколько каждой изъ нихъ получилъ.

Рѣшен. Пусть первой получилъ x рубл. по
второму досталось $x+8$, а третьему $x+x$
 $+8 = 2x+8$, коихъ сумма вмѣстѣ взятая дол-
жна быть $= 112$; по сему выпиши изъ обѣхъ ча-
стей

x спей 16, оспанется $4x=112$
 $x+8$ $-16=96$, а по раздѣленіи ка-
 $2x+8$ ждой части на 4, найдется x
 $4x+16=112.$ $=24$. И такъ первой получилъ
 24, впорой $24+8=32$, претій $24+32=56$,
 коихъ сумма $=112$.

Задача. XIV. Неизвѣстное число Козаковъ получили въ добычу нѣкоторое число лошадей; но когда каждой изъ нихъ взялъ по 2 лошади, то оспалось 3 лошади; а когда начали брать по 3 лошади, тогда не доспало 8 лошадей: спрашивается число Козаковъ и число лошадей.

Рѣшен. Положимъ число Козаковъ $= x$, по обстоятельству вопроса, будетъ $2x + 3 =$ числу лошадей; также и $3x - 8 =$ помужъ числу; по сему $3x - 8 = 2x + 3$, въ копоромъ уравненіи по предписаннымъ правиламъ найдется x какъ слѣдуетъ:

$$3x - 8 = 2x + 3$$

$3x - 2x = x = 3 + 8 = 11 =$ числу Козаковъ
 а наконецъ $2x + 3 = 2 \cdot 11 + 3 = 25 =$ числу лошадей.

Задача. XV. Петръ, Иванъ и Яковъ имѣютъ неизвѣстное число денегъ; Петръ съ Иваномъ вмѣстѣ 40 рубл. Петръ съ Яковомъ 80 рубл. Иванъ съ Яковомъ 60 руб.: спраш. число денегъ каждаго.

Рѣшен. Положимъ общую сумму денегъ всѣхъ трехъ человекъ x , то ежели изъ сей суммы вычестъ 40 $= a$, оспанется $x - a$ деньги Якова, а естли изъ x вычестъ 80 $= b$, то остатокъ $x - b$ будетъ число Ивановыхъ денегъ; будежъ

изъ x вычтется $60 = c$, то $x - c$, будетъ число Петровыхъ денегъ, и при сѣи числа должны бытъ равны суммѣ всѣхъ денегъ x ; по сей причинѣ произойдетъ слѣдующее уравненіе: $(x-a) + (x-b) + (x-c) = x$ или $x-a+x-b+x-c=x$, въ которомъ $3x-a-b-c=x$; а по перенесеніи извѣстныхъ количествъ въ другую часть уравненія, будетъ $3x=x+a+b+c$; по отнятіи жъ x , будетъ $2x=a+b+c$, въ которомъ раздѣля каждую часть на 2, найдется $x = \frac{a+b+c}{2} = \frac{40+80+60}{2} = \frac{180}{2} = 90$; откуда найдется $x-a=90-40=50$ = числу денегъ Якова, $x-b=90-80=10$ = числу Ивановыхъ денегъ, и наконецъ $x-c=90-60=30$, число денегъ Петровыхъ.

Задача XVI. Нѣкто 5500 рублей своего имѣнія приказалъ послѣ смерти раздѣлить чепыремъ свойственникамъ А, В, С и D такъ, чтобы В взялъ вдвое больше А, С столько, сколько А и В; а D столько, сколько С и В; спраш. по сколько каждому достанется.

Рѣшен. Положимъ А получитъ x рубл. то по обстоятельству вопроса, В возьметъ $2x$, С достанется $x+2x=3x$, а D получитъ $2x+3x=5x$, коихъ общая сумма $x+2x+3x+5x=(5500)=a$, или $11x=a$, гдѣ по раздѣленіи обѣихъ частей на 11, найдется $x = \frac{a}{11} = \frac{5500}{11} = 500$ = числу денегъ А, В получитъ $2x=500 \times 2=1000$, С $=3x=500 \times 3=1500$, а D достанется $5x=500 \times 5=2500$.

Зада-

Задача XVII. А и В начали играть въ карты съ неизвѣстною суммою денегъ, изъ коихъ у каждаго было поровну; а послѣ игры нашлось, что А выигралъ 20 рублей, а у В осталось въ половину меньше А; спрашивается сколько у каждаго сначала было.

Рѣшен. Положимъ, что каждой сначала имѣлъ x рубл. но какъ А выигралъ 20 рублей, то у него послѣ игры будетъ $x+20$, а В будетъ имѣть половину онаго то есть $\frac{x}{2} + 10$, которое ежели вычтемъ изъ 20, то есть изъ общей суммы денегъ, то будетъ остатокъ $2x - \frac{x}{2} - 10 = x + 20$; откуда найдется $3x - 20 = 2x + 40$, а по переставкѣ величинъ, выйдетъ $x = 60 =$ числу денегъ каждаго. И такъ послѣ игры А имѣлъ $60 + 20 = 80$; а у В осталось 40 рублей.

Задача XVIII. Число 5 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы частное отъ раздѣленія большей части на меньшую было поже 5.

Рѣшен. Пусть $5 = a$, x большая часть и $a - x$ меньшая: то по силѣ вопроса будетъ $\frac{x}{a-x} = a$, а по умноженіи на $a-x$ будетъ $x = (a-x) \cdot a = a^2 - ax$; придай ко обѣимъ частямъ уравненія ax , будетъ $x + ax = a^2$ или $(1+a) \cdot x = a^2$, въ которомъ найдется $x = \frac{aa}{1+a}$. Вычти сіе количество изъ a , останется $a - \frac{aa}{1+a} = \frac{aa + a - aa}{1+a} = \frac{a}{1+a}$, и такъ первая часть $x = \frac{a^2}{1+a}$, вторая $= \frac{a}{1+a}$.

За-

Задача. XIX. Сыскать число, котораго двойная сумма съ 24 пѣмъ превосходитъ число 80, чѣмъ искомое число меньше 100.

Рѣшен. Положи искомое число $= x$, $24 = a$, $80 = b$ и $100 = c$: то по обстоятельству вопроса, будетъ $2x + a - b = c - x$, въ которомъ по перенесеніи величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $3x = c + b - a$, а по раздѣленіи на 3, найдется $x = \frac{c + b - a}{3} = \frac{100 + 80 - 24}{3} = 52$. И такъ $52 \times 2 + 24 - 80 = 100 - 52 = 48$.

Задача. XX. Число 75 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы прижды взятая большая часть, была 15 ю меньше другой части семь разъ взятой.

Рѣшен. Пусть будетъ $75 = a$, $15 = b$, большее число x , то меньшая часть будетъ $= a - x$. И такъ по условію вопроса, будетъ $3x + b = (a - x) \times 7 = 7a - 7x$, въ которомъ переставя величины изъ одной части въ другую съ противными знаками, выйдетъ $3x + 7x$, или $10x = 7a - b$, а по раздѣленіи на 10, найдется $x = \frac{7a - b}{10} = \frac{7 \times 75 - 15}{10} = \frac{510}{10} = 51 =$ большей части, и $a - x = 75 - 51 = 24$ меньш.

Задача. XXI. Нѣкто имѣетъ у себя столько денегъ, что половина, одна треть и четверть его денегъ 10 ю рублями больше всѣхъ его денегъ; спраш. число денегъ.

Рѣшен. Положимъ, искомое число денегъ $= x$: то по обстоятельствамъ вопроса выйдетъ слѣдующее уравненіе:

$$\frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 10$$

$$\frac{13x}{12} = x + 10 \text{ по сложении членов}$$

$$13x = 12x + 120 \text{ по умножении на 12.}$$

$$13x - 12x, \text{ или } x = 120.$$

И такъ $120 \times \frac{1}{2} = 60$, $120 \times \frac{1}{3} = 40$, и $120 \times \frac{1}{4} = 30$, коихъ сумма 130, будетъ 10ю больше 120.

Задача. XXII. Нѣкто, будучи въ дорогѣ, употребилъ въ первую недѣлю $\frac{1}{2}$ своихъ денегъ, во вторую $\frac{1}{4}$, въ третью $\frac{1}{5}$, а по прїѣздѣ въ Москву нашлось оспальныхъ 26 рублей; спрашивается число его денегъ, сколько сначала имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ искомое число денегъ $= x$, $26 = a$, то по обстоятельствуамъ вопроса будетъ слѣдующее уравненіе:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + a = x.$$

$$\frac{47x}{60} + a = x \text{ по сложении членов}$$

$$47x + 60a = 60x \text{ по умнож. на 60}$$

$$60a = 60x - 47x = 13x, \text{ по переставкѣ велич.}$$

$$\frac{60a}{13} = x = \frac{60 \times 26}{13} = 120 \text{ искомое число.}$$

Задача. XXIII. Нѣкто, примѣчая высоту башни, нашолъ, что $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{5}$ оной закрывается стоящимъ предъ нею домомъ, а сверхъ онаго возвышается на 32 фута; спрашивается высота всѣй башни.

Рѣшен. Пусть будетъ высота башни $= x$, $32 = a$: то по обстоятельствамъ вопроса будетъ $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x + a = x$, или $\frac{11}{3}x + a = x$; умножь каждую часть уравненія чрезъ 15, будетъ $13x + 15a = 15x$, а вычтя $13x$, выйдетъ $15a = 2x$, гдѣ $\frac{15a}{2} = x = \frac{15 \times 32}{2} = 240 =$ высотъ башни.

Задача. XXIV. Одинъ полководецъ, проигравши баталію, нашелъ, что половина всей арміи съ 3600 человекъ побита, восьмая часть съ 600 человекъ ранены, а оставшаяся пятая часть досталась плѣнными и бѣжавшими; спрашивается число людей всего войска.

Рѣшен. Положимъ будетъ число людей всего войска x , $3600 = a$, $600 = b$: то по обстоятельствамъ вопроса, будетъ $\frac{x}{2} + a + \frac{x}{8} + b + \frac{x}{5} = x$, или $\frac{2x + x + 8x}{40} + a + b = x$, въ которомъ по сложеніи членовъ выйдетъ $\frac{33x}{40} + a + b = x$; по умноженіи на 40, будетъ $33x + 40a + 40b = 40x$; вычти $33x$, останется $40a + 40b = 7x$, а по раздѣленіи на 7 найдетсѣя $x = \frac{40a + 40b}{7} = \frac{40 \times 3600 + 40 \times 600}{7} = 24000$, число людей всей арміи.

Задача. XXV. Дочь спрашивала отца о числѣ своихъ лѣтъ, ей отвѣщено, что за 4 года предъ симъ лѣта твои составляли $\frac{1}{3}$ настоящихъ моихъ лѣтъ, а теперь твои лѣта равняются $\frac{2}{3}$ моихъ лѣтъ; спраш лѣта каждого.

Рѣ-

Рѣшен. Пусть число лѣтъ отца $= x$, то лѣта дочери будутъ $\frac{1}{3}x + 4 = \frac{x}{3}$, или $\frac{x+12}{3} = \frac{2x}{5}$, въ которомъ выйдетъ $5x + 60 = 6x$; а вычтя изъ обѣихъ частей уравненія $5x$, останется $60 = x =$ лѣтамъ отца, $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \times 60 = 24$, лѣта дочери.

Задача. XXVI. А, В, С, D и Е получили неизвѣстную сумму награжденія, изъ коего В взялъ 100 рублей меньше, нежели А; С 160 рубл. больше, нежели В; D 50 рублей меньше С, и Е 150 рубл. больше D, и при томъ Е досталось столько, сколько А и В; спрашивается количество награжденія, и по сколько каждому досталось.

Рѣшен. По предвѣдущимъ правиламъ найдемъ, что А получилъ 260, В получилъ $= 160$, С досталось $= 320$, D взялъ $= 270$, Е получилъ $= 420$; по сему число награжденія $260 + 160 + 320 + 270 + 420 = 1430$ рубл.

Задача. XXVII. Число 60 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы превосходство 64 надъ большею частию равно было удвоенному превосходству 38 надъ меньшею частию.

Рѣшен. Положимъ $a = 60$, $b = 64$, $38 = c$, большая часть $= x$, меньшая будетъ $a - x$. И такъ по обстоятельству вопроса, будетъ $b - x = (c - a + x) \times 2 = 2c - 2a + 2x$, въ которомъ по перенесеніи членовъ, выйдетъ $b - 2 + 2a = 2x + x = 3x$, а пораздѣленіи на 3, най-

$$д\acute{е}тся\ x = \frac{b - 2c + 2a}{3} = \frac{64 + 120 - 76}{3} = 36 = \text{большей}$$

шей

шей части, и $60 - 36 = 24 =$ меньшей части.

Задача. XXVIII. Нѣкто, будучи 74 лѣтъ вопрошенъ былъ, давно ли въ опспавкѣ? на вопросъ отвѣтствовано: $\frac{2}{3}$ моихъ лѣтъ до опспавки равняюся $\frac{2}{3}$ лѣтъ послѣ опспавки; спрашивается какихъ лѣтъ опспавленъ.

Рѣшен. Положимъ во время опспавки было x лѣтъ, и $74 = a$, то послѣ опспавки будетъ $a - x$. И такъ по силѣ вопроса $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}(a - x)$
 $= \frac{a - 3x}{3}$, въ которомъ по исключеніи знаменателей, выйдетъ $10x = 27a - 27x$, а придавъ къ обѣимъ частямъ $27x$, будетъ $10x + 27x$ или $37x = 27a$, откуда найдется $x = \frac{27a}{37} = 54$ искомыя лѣта, и $74 - 54 = 20$, число лѣтъ послѣ опспавки. И такъ $54 \times \frac{2}{3} = 12$, также и $20 \times \frac{2}{3} = 12$.

Задача. XXIX. На вопросъ, которой часъ? отвѣтствовано, $\frac{2}{3}$ прошлыхъ часовъ отъ полудни до сего времени, равны $\frac{2}{3}$ оставшихъ до полуночи; спраш. сколько тогда часовъ было.

Рѣшен. Пусть въ то время прошлыхъ часовъ отъ полудни было x , то оставшихъ до полуночи будетъ $12 - x$. И такъ по обстоятельству вопроса, будетъ $\frac{2}{3}x = (12 - x) \cdot \frac{2}{3} = \frac{24 - 2x}{3}$, гдѣ по исключеніи знаменателей, будетъ $6x = 120 - 10x$, а по перенесеніи $10x$ въ первую часть уравненія, выйдетъ $6x + 10x$ или $16x = 120$, откуда найдется $x = \frac{120}{16} = 7\frac{1}{2}$ часовъ.

Задача. XXX. Веселый Французъ, пришедъ въ практиръ съ неизвѣстною суммою своего богатства, занялъ у содержателя столько денегъ, сколько у себя имѣлъ; изъ сей суммы издержавъ 1 рубль, съ ошашкомъ пришелъ въ другой практиръ, гдѣ опять занявши столько, сколько имѣлъ, издержалъ въ ономъ также 1 рубль; потомъ пришедъ въ третій и четвершой практиръ учинилъ тоже, наконецъ по выходѣ изъ четвертаго практира не имѣлъ ничего; спраш. количество его денегъ.

Рѣшен. Пусть число денегъ будетъ x рубл. то по силѣ вопроса будетъ въ первомъ практирѣ $2x$, а по издержкѣ 1 рубля останется $2x - 1$; въ другомъ практирѣ будетъ у него $(2x - 1) \cdot 2 = 4x - 2$, а послѣ проигрыша одного рубля останется, $4x - 2 - 1 = 4x - 3$; въ третьемъ практирѣ будетъ имѣть $(4x - 3) \cdot 2 = 8x - 6$, послѣжъ проигрыша останется $8x - 6 - 1 = 8x - 7$; въ четвертомъ практирѣ съ займомъ, будетъ у сего весельчака $(8x - 7) \cdot 2 = 16x - 14$, а по издержкѣ одного рубля останется $16x - 14 - 1 = 16x - 15 = 0$; въ копоромъ ежели величина 15 перенесется въ другую часть уравненія съ пропивнымъ знакомъ, то выйдетъ $16x = 15$, а по раздѣленіи на 16, найдется $x = \frac{15}{16}$ рубл. $= \frac{15}{16} \times 100 = \frac{1500}{16} = 93\frac{3}{4}$ коп. число денегъ.

Задача. XXXI. Нѣкто на вопросъ, сколько имѣетъ денегъ? отвѣчалъ, втрое больше, нежели проигралъ; а когда вопрошенъ былъ о числѣ проигрыша, то сказалъ: ежели проигрышъ мой умножить на $\frac{1}{2}$ остальныхъ денегъ, то выйдетъ

И

то

по число, сколько сначала имѣлѣ; спрашивается число настоящихъ денегъ.

Рѣшен. Въ семъ вопросѣ найдется число настоящихъ денегъ $= 24$ руб. по сему $\frac{24}{3} = 8 =$ проигрышу, и $8 \times \frac{24}{8} = 32 =$ числу ден. сначала.

Задача. XXXII. Въ нѣкоторомъ войскѣ считается 100,000 человекѣ, въ томъ числѣ столько егерей, что половина ихъ съ третию частію прочаго войска составляютъ 35000 человекѣ; спраш. число егерей.

Рѣшен. Положимъ $a = 100000$, $b = 35000$, число егерей x ; то по обстоятельству вопроса будетъ прочаго войска $a - x$, и такъ $\frac{x}{2} + \frac{a-x}{3} = b$, въ которомъ по изключеніи знаменателей будетъ $3x + 2a - 2x = 6b$, то есть $x + 2a = 6b$, а по перенесеніи членовъ изъ одной части въ другую, найдется $x = 6b - 2a = 35000 \times 6 - 200000 = 100000 =$ числу егерей.

Задача. XXXIII. Найди два числа, изъ которыхъ одно втрое больше другаго, а сумма ихъ квадратовъ въ пять разъ больше суммы ихъ.

Рѣшен. Положимъ, меньшее число $= x$, большее будетъ $= 3x$, сумма ихъ равна $4x$; то по силѣ вопроса будетъ $x^2 + 9x^2 = 4x \times 5 = 20x$, то есть $10x^2 = 20x$, а по раздѣленіи на $10x$ найдется $x = 2 =$ меньшему, по сему большее будетъ $= 3x = 6$.

Задача. XXXIV. Въ пороховой составѣ положено селистры половина всего состава съ 6 пудами, сѣры одна треть безъ пяти пудѣ, уголья четверть всего состава безъ трехъ пудѣ;

пудъ; спраш. сколько каждого вещества въ составѣ положено.

Рѣшен. По предѣидущимъ правиламъ найдется въсу всего состава; $=24$ пуда, въсѣ селистры $=\frac{24}{2}+6=18$, въсѣ сѣры $\frac{24}{3}-5=3$, въсѣ уголья $\frac{24}{4}-3=3$ пуда.

Задача. XXXV. Частный дворянинъ правосудіемъ принужденъ былъ заплапшъ богатому вельможѣ за поправу пустополя половину своего спада коней съ полуконемъ; въ другой разъ взяпо у него половина оспатка съ полулошадью, въ третій разъ присуждено также заплапшъ половину оспатка съ половиною коня, и наконецъ въ четвѣртый разъ учиня по же, оставили бѣдняка только съ 5 ю лошадями; спрашивается сколько дворянинъ коней имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ число коней въ шабунѣ было x , то по обстоятельствомъ вопроса оспанется у дворянина послѣ первого грабежа $\frac{x-1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$; послѣ второго насилія оспатокъ будетъ $(\frac{x-1}{2}):2-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x-1-2}{4}=\frac{x-3}{4}$; послѣ третьяго взяпья оспанется $(\frac{x-3}{4}):2-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}=\frac{x-3-4}{8}=\frac{x-7}{8}$; наконецъ послѣ четвѣртого поспщенія оспалось $(\frac{x-7}{8}):2-\frac{1}{2}=\frac{x-7-8}{16}=\frac{x-15}{16}$, которое равно 5, опѣ чего произойдетъ уравненіе $\frac{x-15}{16}=5$, по умноженіи жъ чрезъ 16 будетъ $x-15=80$, а перенеся 15 въ другую часть

И 2

ура-

уравненія найдется $x = 95 =$ числу всѣхъ коней.

Задача XXXVI. Нѣкто оставилъ по смерти своей нѣсколько дѣшей и имѣніе, которое дѣши дѣляшъ между собою такъ: первой получаетъ 1000 рублей и $\frac{1}{7}$ часть остатка, второй послѣ перваго 2000 рублей и $\frac{1}{7}$ часть остатка; потомъ беретъ третей 3000 рублей и еще седьмую часть остальнаго, и такъ далѣе одинъ послѣ другаго; а по раздѣлу явилось у каждого по ровну; спрашивается сколь велико было имѣніе, число дѣшей, и сколько каждому досталось.

Рѣшен. Положимъ $a = 1000$, а все имѣніе $= x$, то по обстоятельствамъ вопроса, первой получилъ $a + \frac{x-a}{7} = \frac{7a+x-a}{7} = \frac{6a+x}{7}$. Остатокъ послѣ взявша перваго будетъ $x - \frac{6a+x}{7} = \frac{7x-6a-x}{7} = \frac{6x-6a}{7}$, а когда изъ сего числа второй возьметъ 2000 = 2a, то останется $\frac{6x-6a}{7} - 2a = \frac{6x-6a-14a}{7} = \frac{6x-20a}{7}$; седьмая часть сего числа есть $\frac{6x-20a}{7 \times 7} = \frac{6x-20a}{49}$; и такъ второй получаетъ $2a + \frac{6x-20a}{49} = \frac{98a+6x-20a}{49} = \frac{78a+6x}{49}$, которое по силѣ вопроса должно быть равно количеству денегъ перваго, то есть $\frac{6a+x}{7} = \frac{78a+6x}{49}$, въ семъ уравненіи умножь числителя и знаменателя первой части чрезъ 7, будетъ $\frac{42a+7x}{49}$

$\frac{78a+6x}{49}$, а по исключеніи знаменателей выйдемъ $42a+7x=78a+6x$, въ которомъ по перенесеніи членовъ найдемся $7x-6x=78a-42a$ или $x=36a=36000=$ числу рублей имѣнія; числомъ денегъ каждого $\frac{6a+x}{7}=\frac{6000+36000}{7}=\frac{42000}{7}=6000$, и $\frac{36000}{6000}=6$ числу дѣшей.

О двухъ и больше уравненіяхъ первой степени.

§ 124. Не рѣдко случается, что величину двухъ или больше неизвѣстныхъ количествъ, означенныхъ буквами x , y , z и проч. находить должно; тогда при сыскиваніи такихъ количествъ надлежитъ быть столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ количествъ въ вопросѣ предложено будетъ, изъ коихъ во всякомъ уравненіи каждое изъ неизвѣстныхъ количествъ поставлено быть должно.

Задача. I. Въ данныхъ двухъ уравненіяхъ $x+y=a$, и $x-2y=b$, сыскать величины двухъ неизвѣстныхъ количествъ x и y .

Рѣшен. Изъ каждого даннаго уравненія сыщи прежде неизвѣстную величину x ; потомъ найденныя равныя количества x , соединя знакомъ равенства, получишь одно уравненіе, въ которомъ одна только неизвѣстная буква y найдется будетъ; потомъ изъ сего уравненія сыскавши по предписаннымъ правиламъ величину буквы y , поставь найденную величину въ ка-

И 3 комъ

комъ нибудь изъ первыхъ урѣненій вмѣсто y , получишь величину буквы x , какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{rcl} x+y=a & \text{также} & x-2y=b \\ \hline x=a-y & & x=b+2y \end{array}$$

Соединя сїи равныя количесва вмѣстѣ знакомъ равенства будетъ

$$\begin{array}{rcl} b+2y=a-y \\ \hline 2y+y=3y=a-b & \text{по переносѣ величинъ.} \\ 3: & & \\ \hline y=\frac{a-b}{3} \end{array}$$

Сіе найденное количесво, поставъ въ первомъ урѣненіи $x=a-y$ вмѣсто y , найдемъся

$$x=a-y=a-\left(\frac{a-b}{3}\right)=\frac{3a-a+b}{3}=\frac{2a+b}{3}.$$

или

Сыскавъ изъ втораго урѣненія величину $x=b+2y$, поставъ оную въ первомъ урѣненіи $x+y=a$ вмѣсто x , получишь $b+2y+y=a$ или $b+3y=a$, гдѣ переславъ букву b , будетъ $3y=a-b$, а по раздѣленіи на 3 найдемъся $y=\frac{a-b}{3}$. Ежели сія величина поставишся вмѣ-

сто y въ какомъ нибудь изъ двухъ урѣненій, на примѣрѣ, въ первомъ, то будетъ $x+y=a$
 $=x+\frac{a-b}{3}=a$, въ коемъ перенесъ $\frac{a-b}{3}$ въ другую часть урѣненія, сыщется $x=a-\left(\frac{a-b}{3}\right)$
 $=\frac{3a-a+b}{3}=\frac{2a+b}{3}$ тоже, что и прежде.

Задача. II. Въ данныхъ урѣненіяхъ $ax+by=e$, и $dy-ex=n$ найди неизвѣстныя величины x и y . **Рѣше-**

Рѣшен. Сперва сыщи изъ каждаго уравненія величину буквы x , а потомъ составя изъ найденныхъ равныхъ количествъ одно уравненіе, сыщи величину второй буквы y , по которой опредѣлился величина x какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{rcl} 1) ax + by = e & 11) dy - ex = n \\ \hline ax = e - by & dy - n = ex \\ : a & : e \\ \hline x = \frac{e - by}{a} & \frac{dy - n}{e} = x \end{array}$$

Потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ слѣдующее уравненіе $\frac{dy - n}{e} = \frac{e - by}{a}$, найдется величина y какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{rcl} \frac{dy - n}{e} = \frac{e - by}{a} \\ \hline a dy - an = e^2 - bey \\ \hline a dy + bey = e^2 - an \\ \hline (ad + be)y = e^2 - an \\ \hline y = \frac{ee - an}{ad + be} \end{array}$$

Поставъ сіе количество во второмъ уравненіи $x = \frac{dy - n}{e}$ вмѣсто y , будетъ $x = \left(\frac{ee + an}{ad + be} \right) \frac{d}{e} - \frac{n}{e} = \frac{eed - adn}{ade + bee} - \frac{n}{e}$.

Задача III. Въ данныхъ уравненіяхъ $3x\sqrt{2} - 2y = 8$, и $2y\sqrt{3} + 2x = 10$, сыскашь неизвѣстныя величины x и y .

Рѣшен. Сперва сыщи изъ каждаго уравненія величину x , а потомъ составя изъ найденныхъ равныхъ количествъ послѣднее уравненіе, сыщи

И 4 вели-

величину y , посредствомъ которой опредѣлиш-
ся величина, x какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{rcl} 3x\sqrt{2}-2y=8 & & 2y\sqrt{3}+2x=10 \\ \hline 3x\sqrt{2}=8+2y & & 2x=10-2y\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2}: & & 2: \\ \hline x=\frac{8+2y}{3\sqrt{2}} & & x=5-y\sqrt{3}, (A) \end{array}$$

Потомъ будетъ

$$\begin{array}{rcl} \frac{2y+8}{3\sqrt{2}} & = & 5-y\sqrt{3} \\ \hline 2y+8 & = & 15\sqrt{2}-3y\sqrt{6} \\ \hline 2y+3y\sqrt{6} & = & 15\sqrt{2}-8 \text{ по переносѣ велич.} \\ \hline \text{или } (2+3\sqrt{6})y & = & 15\sqrt{2}-8 \\ 2+3\sqrt{6}: & & \\ \hline y & = & \frac{15\sqrt{2}-8}{2+3\sqrt{6}} \end{array}$$

Наконецъ поставь сіе количество въ уравненіе
(A) вмѣсто y , найдетсѣ $x = \frac{10+8\sqrt{3}}{2+3\sqrt{6}}$.

§ 125. Прибавлен. Ежели въ вопросѣ бу-
дутъ при неизвѣстныя величины, и споль-
кожъ уравненій; то надлежитъ сперва изъ
всѣхъ прехъ уравненій сыскашь одну какую ни-
будь неизвѣстную величину; потомъ изъ прехъ
найденныхъ равныхъ количествъ составя два
уравненія, найми другую неизвѣстную величи-
ну, наконецъ сдѣлавъ изъ сихъ двухъ равныхъ
количествъ одно послѣднее уравненіе, должно
сыскашь прешью неизвѣстную величину; по-
средствомъ которой и прочія неизвѣстныя ко-
личества легко уже найдены бышь могутъ,

на

из примѣръ: пусть будутъ три слѣдующія уравненія, I) $3x+5y-4z=25$, II) $5x-2y+3z=46$. III) $3y+5z-x=62$; по сыщи каждого изъ сихъ уравненій величину x , которая посредствомъ предъидущихъ правилъ найдется въ I) $x=\frac{25-5y+4z}{3}$; во II) $x=\frac{46+y-3z}{5}$; въ III) $x=3y+5z-62$. Помомъ составя изъ сихъ трехъ равныхъ количествъ два уравненія, какъ-то первое изъ I и II, второе изъ II и IIIго, сыщи неизвѣстную величину z , какъ изъ слѣдующаго видно:

Изъ I и II го

$$\frac{25-5y+4z}{3} = \frac{46+y-3z}{5}$$

$$125-25y+20z=138+6y-9z \text{ по изкл. знам.}$$

$$20z+9z=138-125+6y+25y \text{ по перен. вел.}$$

$$29z=13+31y \text{ по сокращеніи}$$

$$29: \text{_____}$$

$$z=\frac{13+31y}{29} \text{ (A)}$$

Изъ II и III го.

$$3y+5z-62=\frac{46+y-3z}{5}$$

$$15y+25z-310=46+y-3z \text{ по умнож. на 5.}$$

$$25z+3z=46+310+y-15y. \text{ пересп. велич.}$$

$$28z=356-14y$$

$$28: \text{_____}$$

$$z=\frac{356-14y}{28} \text{ (B)}$$

Наконецъ изъ сихъ двухъ послѣднихъ равныхъ количествъ (А) и (В) составя одно уравненіе, найди величину у, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r} \frac{13+31y}{29} = \frac{356-13y}{28} \\ \hline 364+868y=10324-377y \\ \hline 868y+377y=10324-364 \\ \hline 1245y=9960 \\ \hline y=\frac{9960}{1245}=8 \end{array}$$

И такъ поставя 8 въ уравненіи (В) вмѣсто у, найдется $z=\frac{356-13y}{28}=\frac{356-104}{28}=9$; поставя въ III изъ первыхъ уравненій 8 вмѣсто у, а 9 вмѣсто z, найдется $x=3y+5z-62=24+45-62=7$.

Задача IV. Въ уравненіяхъ $ax-bx=2c^2=xt$ $=\frac{ybc}{a}$ и $yc=\frac{zzz}{p}$ найди неизвѣсныя величины.

Рѣшен. Сперва найди изъ уравненія $ax-bx=2c^2$ величину неизвѣстной буквы x, гдѣ $x=\frac{2c^2}{a-b}$; потомъ поставя сіе найденное количество въ уравненіи $xt=\frac{ybc}{a}$ вмѣсто x, отъ чего произойдетъ уравненіе $\frac{2c^2t}{a-b}=\frac{ybc}{a}$, въ коемъ величина у найдется слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} \frac{2c^2t}{a-b} = \frac{ybc}{a} \\ \hline 2acst=abcy-b^2cy \\ \hline abc-b^2c: \\ \hline \frac{2acst}{abc-b^2c} = \frac{2acst}{ab-bb}=y. \end{array}$$

На-

Наконецъ сію найденную величину y , поставь въ уравненіи $yz = \frac{zzz}{p}$ вмѣсто y , откуда произойдетъ уравненіе $\frac{2acc}{ab-b^2} = \frac{zzz}{p}$, въ которомъ по умноженіи обѣихъ частей уравненія чрезъ p будетъ $z^3 = \frac{2accpr}{ab-bb}$, а по извлеченіи кубическаго корня найдется $z = \sqrt[3]{\frac{2accpr}{ab-bb}}$.

§ 126. Прибавлен. Подобнымъ образомъ находятся и четыре неизвѣстныя величины изъ четырехъ уравненій, изъ коихъ также сперва сыскивается величина одной какой нибудь неизвѣстной буквы; а потомъ изъ найденныхъ четырехъ равныхъ количествъ составляются три уравненія, въ коихъ посредствомъ двухъ предвѣдущихъ предложеній изобрѣтаются при неизвѣстныя величины; а наконецъ чрезъ оныя сыскиваются третье и четвертое неизвѣстное количество, какъ-то изъ ниже слѣдующихъ примѣровъ будетъ видно.

Задача. V. Найди два числа, коихъ сумма $= a$, а разность $= b$.

Рѣшен. I. Пусть будетъ большее количество x , меньшее y : то по условію вопроса будетъ I) $x+y=a$, II) $x-y=b$, изъ коихъ въ первомъ найдется $x=a-y$, во второмъ $x=b+y$, потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе $b+y=a-y$, въ которомъ по переставкѣ величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $y+y$ или $2y=a-b$, а по раздѣленіи на 2, найдется $y = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ меньшему количеству; наконецъ поставя сію величину въ уравненіе $x=b+y$ вмѣсто

сто y , сыщется $x = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = \frac{b+a}{2}$
 $= \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$.

Рѣшен. II. Сложъ помянутыя уравненія вмѣстѣ, будетъ $x+y=a$

$$x-y=b$$

$$2x=a+b$$

$$2: \text{-----}$$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \text{болыш. колич.}$$

Потомъ найдемъ изъ перваго уравненія $y = a - x = a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ тоже, что и прежде.

Задача VI. Найди два числа, коихъ разность $= 5$, также и частное отъ раздѣленія большаго на меньшее $= 5$.

Рѣшен. Положимъ $a=5$, большее количество x а меньшее $=y$, то по обстоятельству вопроса будетъ I) $x-y=a$, II) $\frac{x}{y}=a$; и такъ изъ перваго уравненія найдемъ $x=a+y$, а изъ втораго $x=ay$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составимъ уравненіе $ay=a+y$, гдѣ переставя величину y изъ второй части уравненія въ первую, будетъ $ay-y=a$, или $(a-1)y=a$, а по раздѣленіи на $a-1$ найдемъ $y = \frac{a}{a-1}$; наконецъ поставя величину $\frac{a}{a-1}$ вмѣсто y , въ уравненіе $x=a+y$, или $x=ay$, сыщется $x = a \times \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$: слѣдственно $y = \frac{a}{a-1}$, а $x = \frac{a^2}{a-1}$. При-

Примѣчан. Поелику буквою *a* означать можно всякое число; то изъ сего явствуетъ и вообще, что для сысканія двухъ чиселъ, коихъ бы разность и частное число оныхъ раздѣленія большаго на меньшее равны были одному какому нибудь предложенному числу, надлежитъ только для большаго числа квадратъ даннаго числа раздѣлить на предложенное число безъ единицы; а для изобрѣненія меньшаго, раздѣлить данное число на тоже число безъ единицы.

Задача VII. Найти два числа, изъ коихъ ежели каждое умножится на 18, то бы произведение перваго было квадратъ, а произведение втораго его корень; а когда оба количества умножатся на 3, то бы первое произведение было кубъ, а второе его корень.

Рѣшен. Пусть будетъ $a=18$, $b=3$, большее количество $=x$, а меньшее $=y$: то по обстоятельству вопроса будетъ I) $\sqrt{ax}=ay$, II) $\sqrt[3]{bx}=by$, изъ коихъ ежели каждую часть перваго уравненія возвысимъ во вторую степень, а втораго въ третью; то будетъ первое уравненіе $\sqrt{a^3x^2}=ax=a^2y^2$, а втораго $\sqrt[3]{b^3x^3}=bx=b^3y^3$ (977 и 78), гдѣ изъ перваго найдется $x=ay^2$, а изъ втораго $x=b^2y^3$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составится уравненіе $b^2y^3=ay^2$, въ которомъ по раздѣленіи каждой части на b^2y^2 найдется $y=\frac{a}{bb}=\frac{18}{9}=2$ = меньшему числу, чрезъ которое найдется $x=ay^2=18.4=72$.

Задача VIII. Найти такую дробь, у которой ежели къ числителью придастся единица, то выйдетъ дробь $\frac{1}{3}$; а когда къ знаменателю придастся единица, то выйдетъ $\frac{1}{4}$.

Рѣшен.

Рѣшен. Пусть будетъ числитель искомой дроби x , а знаменатель y ; то по вопросу выйдутъ слѣдующія уравненія: 1) $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$, 11)

$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$, изъ коихъ посредствомъ предложенныхъ правилъ найдется величина x и y слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rcl} 1) \frac{x+1}{y} = \frac{1}{3} & & 11) \frac{x}{y+1} = \frac{1}{4} \\ \hline 3x+3=y & & \hline 4x=y+1 \\ & & \hline 4x-1=y \end{array}$$

Потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составится уравненіе $4x-1=3x+3$,

$$\hline 4x-3x=3+1.$$

откуда найдется $x=4$.

а $y=3x+3=12+3=15$. И такъ искомая дробь

$\frac{x}{y} = \frac{4}{15}$, у которой придавъ къ числителю 1, будетъ

$\frac{4+1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, а придавъ къ знаменателю 1, будетъ

$$\frac{4}{15+1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Задача. IX. Два человека А и В имѣютъ по нѣскольку денегъ, такъ что ежели А дастъ В 5 рубл. то будетъ у обоихъ по ровну; а ежели В дастъ А 5 рубл., то А будетъ имѣть впредъ больше, нежели останется у В; спраш. сколько каждой денегъ имѣетъ.

Рѣшен. Положимъ $5=a$, количество денегъ человека А $=x$, а В $=y$: то по силѣ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $x-a=y$, $x+a=(y-a).3$, изъ коихъ въ каждомъ

домъ уравненіи помощію предписанныхъ правилъ
найдется величина x и y слѣдующимъ образомъ:

$$1) x - a = y + a$$

$$11) x + a = (y - a)3 = 3y - 3a$$

$$x = y + 2a$$

$$x = 3y - 4a$$

откуда произойдетъ послѣднее уравненіе

$$3y - 4a = y + 2a$$

$$3y - y = 2a + 4a$$

или $2y = 6a$

2: $y = 3a$

$$y = 3a = 15; \text{ а } x = y + 2a = 15 + 10 = 25.$$

Задача X. Увѣряютъ, что Езопова голова
была длиною 7 дюймовъ, а ноги такъ длинны,
какъ голова и половина шуловища, шулови-
щежъ равно длинѣ ногъ съ головою; спрашив.
ростъ сего славнаго человѣка.

Рѣшен. Положимъ $a = 7$, длина ногъ $= x$,
а длина шуловища $= y$; то по силѣ вопроса
произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x = a + \frac{y}{2}$;
II) $y = x + a$, изъ которыхъ во второмъ уравне-
ніи будетъ $y - a = x$. И такъ сославя изъ пер-
ваго и послѣдняго равныхъ количествъ уравне-
ніе $y - a = a + \frac{y}{2}$, умножь каждую часть на 2,
выйдетъ $2y - 2a = 2a + y$, въ которомъ перенеся
величины изъ одной части въ другую, найдется
 $2y - y$ или $y = 4a = 28 =$ длинѣ шуловища,
а длина ногъ $x = a + \frac{y}{2} = 21$; весь же ростъ Езо-
па $= 7 + 28 + 21 = 56$ дюйм. или 2 аршина.

За.

Задача XI. Найди два числа, коихъ бы сумма была вдвое ихъ разности, а произведение въ двенадцать разъ болѣе ихъ суммы.

Рѣшен. Положимъ большее число x , а меньшее y , то по обстоятельству вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $(x - y) \times 2 = y + x$, 11) $xy = (x + y) \times 12$, изъ коихъ въ первомъ уравненіи будетъ $2x - 2y = y + x$, а переставя величины изъ одной части въ другую, найдемъ $2x - x = y + 2y$, то есть $x = 3y$; изъ втораго жъ уравненія $xy = 12x + 12y$, въ которомъ вычтя $12x$, будетъ $xy - 12x = 12y$ или $(y - 12) \dots = 12y$, а по раздѣленіи сихъ частей на $y - 12$ найдемъ $x = \frac{12y}{y - 12}$; потомъ составя изъ найденныхъ двухъ равныхъ количествъ x , послѣднее уравненіе $3y = \frac{12y}{y - 12}$; умножь каждую часть на $y - 12$ выйдетъ $3y^2 - 36y = 12y$, въ которомъ будетъ $3y^2 = 12y + 36y = 48y$, а по раздѣленіи каждой части на $3y$, найдемъ $y = 16 =$ меньшему числу, а большее $= x = 3y = 16 \times 3 = 48$.

Задача XII. Нѣкто продаетъ двухъ коней съ двумя седлами, изъ коихъ одно стоить 48 рублей, а другое 3 рубли. За первую лошадь съ хорошимъ седломъ проситъ вдвое дороже, нежели другая стоить съ дешевымъ седломъ; а другую съ хорошимъ седломъ продаетъ вътрое дороже противъ первой съ дешевымъ седломъ; спрашивается цѣна каждаго коня.

Рѣшен. Положимъ $a = 48$, $b = 3$, цѣна перваго коня x , а другаго y рубл. то по силѣ

вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $x + a = (y + b) \cdot 2 = 2y + 2b$, 11) $y + a = (x + b) \cdot 3 = 3x + 3b$; изъ коихъ посредствомъ предъидущихъ правилъ найдутся величины x и y , какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{rcl} 1) x + a = 2y + 2b & 11) y + a = 3x + 3b \\ \hline x = 2y + 2b - a & y + a - 3b = 3x \\ 3: \hline \frac{y + a - 3b}{3} = x \end{array}$$

Потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ послѣднее уравненіе, найдемъ y , какъ изъ слѣдующаго видно:

$$\begin{array}{rcl} 2y + 2b - a = \frac{y + a - 3b}{3} \\ \hline 6y + 6b - 3a = y + a - 3b \\ \hline 6y - y = a + 3a - 6b - 3b \\ \hline \text{или } 5y = 4a - 9b \\ 5: \hline \end{array}$$

$y = \frac{4a - 9b}{5} = \frac{192 - 27}{5} = 33$ Цѣна второму коню; Цѣнажъ перваго $x = 2y + 2b - a = 24$.

Задача XIII. Пріѣзжей Французъ просилъ на Рускаго солдата въ покражѣ всѣхъ его денегъ; воръ сказалъ: правда, что я укралъ его имѣніе; а какъ спросили его о числѣ покраденныхъ денегъ, то онъ отвѣчалъ: ежели къ украденному мною числу денегъ придашь 10 рублей, то выйдетъ мое годовое жалованье, а буде къ количеству его денегъ придашь 20 рублей, то выйдетъ вдвое больше моего жалованья; спрашив. число денегъ просителя и солдатскаго жалованья.

Рѣшен. Пусть солдатъ украсть x рубл. а жалованье его y рубл. и $10 = 1$, по по силѣ вопроса, будетъ первое уравненіе $x + 1 = y$, второе $x + 2a = 2y$; въ которомъ поставя $x + a$ вмѣсто y , будетъ $x + 2a = (x + a) \cdot 2 = 2x + 2a$, гдѣ переставя величины изъ одной части уравненія въ другую, будетъ $2a - 2a = 2x - x$; а по сокращеніи найдемъ $x = 0$, по есмь солдату у Француза украсть было нечего, поелику онъ не имѣлъ ничего. Солдатскоежѣ жалованье $y = x + a = 0 + 10 = 10$ рубл.

Задача. ХІV. Нѣсколько человекѣхъ заплащили за насѣтъ неизвѣстное число денегѣхъ; но извѣстно только то, что ежели бы у нихѣхъ было еще 3 человекѣхъ, то бы каждой заплащилъ гривною меньше; а когда бы двухѣхъ не доставало, то плащилъ бы каждой гривною больше; спрашив. число людей и денегѣхъ.

Рѣшен. Пусть $10 \text{ коп} = a$, число людей x , а каждой плащилъ y , и такѣхъ число заплащенных денегѣхъ будетъ xy , и по условію вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $xy = (x + 3) \times (y - a) = xy + 3y - ax - 3a$, 11) $xy = (x - 2) \times (y + a) = xy - 2y + ax - 2a$, изъ коихѣхъ посредствомъ предъидущихѣхъ правилъ найдутся x и y слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l} \text{I) } xy = xy + 3y - ax - 3a. \quad \text{II) } xy = xy - 2y + ax - 2a \\ \hline xy - xy + ax + 3a = 3y \quad \quad xy - xy + 2y = ax - 2a \end{array}$$

$$\text{III. с. } ax + 3a = 3y$$

$$\text{III. с. } 2y = ax - 2a$$

$$3: \frac{ax + 3a}{3} = y$$

$$2: \frac{ax - 2a}{2} = y$$

$$\frac{ax + 3a}{3} = y$$

$$y = \frac{ax - 2a}{2}$$

По-

Потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ одно послѣднее уравненіе, найдется x , какъ изъ слѣдующаго видно:

$$\begin{array}{r} \frac{5x-2a}{2} = \frac{5x+3a}{3} \\ \hline 3(5x-2a) = 2(5x+3a) \\ 3 \cdot 5x - 6a = 2 \cdot 5x + 6a \\ 3 \cdot 5x - 2 \cdot 5x = 6a + 6a \end{array}$$

III. е. $5x = 12a$

$a = \frac{5x}{12}$

$x = 12$ — числу людей, а каждой платилъ $y = \frac{5x-2a}{2} = \frac{120-20}{2} = 50$ коп. всѣхъ вообще заплатили $xy = 50 \times 12 = 600 = 6$ рубл.

Задача XV. При осадѣ города, одинъ изъ двухъ канонировъ сказалъ другому: ежели ошѣ нашихъ ядеръ отнять по 7, то у меня останется впрое больше твоего, а когда придашь по 7ми ядеръ, то у меня будетъ вдвое больше твоего; спраш. число ядеръ каждаго.

Рѣшен. Положимъ у перваго было x ядеръ, у втораго y , то по обстоятельствамъ вопроса, произойдущъ слѣдующія уравненія: 1) $x-7 = (y-7) \cdot 3 = 3y-21$, 11) $x+7 = (y+7) \cdot 2 = 2y+14$, изъ коихъ въ первомъ будетъ $x = 3y-21+7 = 3y-14$, а изъ втораго $x = 2y+14-7 = 2y+7$; потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ одно уравненіе $3y-14 = 2y+7$, перенеси количества изъ одной части въ другую съ противными знаками, будетъ $3y-2y = 7+14$, то есть $y = 21$ число ядеръ втораго, а перваго $x = 2y+7 = 49$.

Задача XVI. Ежели бы нѣкоторой параллелограмной полъ былъ 2мя фузами ширѣ и

змя длиннѣе, то бы плоскость его была 64^ю квадратными футами больше; а если бы змя футами былъ ширѣ и змя футами длиннѣе, то бы поверхность его была 68 квадратными футами больше; спраш. длина и ширина помянушаго пола.

Рѣшен. Положимъ длина пола x , ширина y , $a=64$, $b=68$, то въ разсужденіи вопроса будетъ первое уравненіе $(x+3) \times (y+2) = xy + 3y + 2x + 6 = xy + a$, второе $(x+2) \times (y+3) = xy + 2y + 3x + 6 = xy + b$, изъ коихъ въ первомъ по переставкѣ величинъ изъ одной части въ другую будетъ $xy - xy + 2x = a - 3y - 6$, а по сокращеніи выйдетъ $2x = a - 3y - 6$, по раздѣленіи же на 2 найдется $x = \frac{a - 3y - 6}{2}$; во второмъ уравненіи по переставкѣ величинъ будетъ $xy - xy + 3x = b - 2y - 6$, по сокращеніи коего выйдетъ $3x = b - 2y - 6$, а по раздѣленіи на 3 найдется $x = \frac{b - 2y - 6}{3}$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составится уравненіе $\frac{b - 2y - 6}{3} = \frac{a - 3y - 6}{2}$, изъ коего по исключеніи знаменателей выйдетъ $2b - 4y - 12 = 3a - 9y - 18$, а по перенесеніи величинъ будетъ $9y - 4y = 3a - 2b - 18 + 12$, то есть $5y = 3a - 2b - 6$, а по раздѣленіи на 5 найдется $y = \frac{3a - 2b - 6}{5} = \frac{3 \cdot 64 - 2 \cdot 68 - 6}{5} = \frac{192 - 142}{5} = 10$ футовъ = ширина пола; а длина онаго $x = \frac{a - 3y - 6}{2} = \frac{64 - 3 \cdot 10 - 6}{2} = \frac{64 - 26}{2} = 14$ футовъ.

Зада-

Задача XVII. Число 100 раздѣлить на 2 части такъ, чтобы квадратъ ихъ разности, безъ 2000, равенъ былъ квадрату изъ удвоенной меньшей части.

Рѣшен. Положимъ $a=100$, $b=2000$, меньшая часть x , большая будетъ $a-x$, а разность ихъ $a-2x$, и такъ $(a-2x)^2-b=4x^2$, то есть $a^2-4ax+4x^2-b=4x^2$, въ коемъ перенеся величины изъ первой части во вторую, будетъ $a^2-b=4ax$, а по раздѣленіи на $4a$ найдемъ $x=\frac{a^2-b}{4a}=\frac{10000-2000}{400}=\frac{8000}{400}=20$ —меньшой части, а большая $a-x=100-20=80$.

Задача XVIII. А и В имѣющъ неизвѣстное число денегъ, А отдалъ В, сколько В имѣлъ, потомъ В отдалъ А, сколько А имѣлъ, послѣ А отдалъ В сколько В у себя имѣлъ, и наконецъ В отдалъ А, сколько онъ тогда имѣлъ, а послѣ такой передачи нашлось у каждого по 160 рублей; спрашив. сколько каждой сначала имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ А имѣлъ x рубл. В у рубл. и $160=a$, и такъ въ разсужденіи вопроса въ первой разѣ будетъ имѣть $A=x-y$, а $B=2y$; потомъ во вторую передачу А будетъ имѣть $2x-2y$, а у В останется $2y-x+y=3y-x$; въ третій разѣ у А останется $2x-2y-3y+x=3x-5y$, а у В будетъ $6y-2x$; наконецъ А будетъ имѣть $6x-10y$, а у В останется $6y-2x-3x+5y$ или $11y-5x$; по сей причинѣ $6x-10y=a$, также $11y-5x=a$; изъ коихъ въ первомъ уравненіи найдемъ $x=\frac{a+10y}{6}$, а во второмъ будетъ $\frac{11y-a}{5}=x$; потомъ

составъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{11y-a}{5} = \frac{a+10y}{6}$, въ коемъ по изключеніи знаменателей, будетъ $66y-6a=5a+50y$, а по перенесеніи величинъ выйдетъ $66y-50y=5a+6a$, то есть $16y=11a$, по раздѣленіи на 16 найдетъ-ся $y = \frac{11a}{16} = \frac{11 \cdot 160}{16} = 110$ — числу В денегъ; а у А будетъ $x = \frac{a+10y}{6} = \frac{160+110 \times 10}{6} = \frac{1260}{6} = 210$.

Повѣрка

А имѣлъ 210, В имѣлъ 110

— 110 + 110

останется = 100 будетъ = 220 въ первой разѣ.

+ 100 — 100

будетъ = 200, останется = 120 во 2й разѣ.

— 120 + 120

останется = 80 будетъ = 240 въ 3й разѣ.

+ 80 — 80

будетъ 160 останется = 160 въ 4й разѣ.

Задача XIX Сыскать число, состоящее изъ двухъ знаковъ, которое бы равно было учетверенной суммѣ обихъ знаковъ; а когда къ искомому числу придастся 36, то бы сумма была равна такому числу, которое произойдетъ отъ переставки тѣхъ же знаковъ, одного на мѣсто другаго.

Рѣшеніе. Положимъ число единицъ въ знакѣ, составляющемъ десятки = x , а въ знакѣ, означающемъ единицы = y , и $36 = a$, то по силѣ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $10x + y = (x + y) \cdot 4 = 4x + 4y$, 11) $10x + y + a = 10y + x$, изъ коихъ въ первомъ уравненіи $10x$

††

$+y=4x+4y$ перенеся величины, будетъ $10x-4x=4y-y$, то есть $6x=3y$, откуда найдется $x=\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}y$; во второмъ $10x+y+a=10y+x$ перенеся величины, будетъ $10x-x=10y-y-a$, то есть $9x=9y-a$, гдѣ $x=\frac{9y-a}{9}$. Потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ x количествъ составитъ уравненіе $\frac{9y-a}{9}=\frac{y}{2}$, въ которомъ по исключеніи знаменателей будетъ $18y-2a=9y$, а по перемѣнѣ величинъ найдешся $18y-9y=2a$, то есть $9y=2a$, гдѣ $y=\frac{27}{9}=\frac{2\cdot 36}{9}=8$ —знаку, составляющему единицы; также $x=\frac{y}{2}=\frac{8}{2}=4$ —числу, означающему десятки, слѣдственно искомое число 48 ; которое вчетверо больше суммы знаковъ $4+8=12$; но ежели къ найденному числу придашь 36 , то будетъ число $48+36=84$, коего знаки переспавлены одно на мѣсто другого, то есть мѣсто десятковъ занимающіе единицы, а на мѣстѣ единицъ поставленъ знакъ десятковъ.

Задача XX. Два бомбардира А и В разговаривали о числѣ своихъ бомбъ. А говорилъ В: ежели бы твоихъ 28 бомбъ придашь къ моимъ, то бы у меня было втрое больше твоего; а В сказалъ А: ежели бы твоихъ 35 бомбъ придашь къ моимъ, то бы у меня было впятеро больше, нежели у тебя останется: спраш. число бомбъ каждаго.

Въ семъ вопросѣ по предъидущимъ правиламъ найдемся, что А имѣетъ 53 бомбы, а В 55 бомбъ.

Задача XXI. Нѣкто имѣетъ два мѣшка денегъ, такъ что деньги перваго мѣшка съ $\frac{2}{3}$ другаго составляютъ 360 рубл. а деньги втораго мѣшка съ $\frac{3}{4}$ перваго также равны 360 рубл. спрашивается сколько въ каждомъ мѣшкѣ денегъ.

Въ семъ вопросѣ найдемся въ первомъ мѣшкѣ 240 рубл. а во второмъ 180 рублей.

Задача XXII. Три челоѣка А, В и D покупаютъ домъ, цѣнокъ въ 1000 рублей, но ни одинъ изъ нихъ заплатить своими деньгами не въ состояніи: А можетъ заплатить своими деньгами съ половиною числа денегъ челоѣка В; В можетъ заплатить, ежели ему дастъ D $\frac{1}{3}$ своихъ денегъ, а D въ состояніи будетъ заплатить своими деньгами, занявъ $\frac{1}{4}$ денегъ у А; спрашивается, сколько каждой денегъ имѣетъ.

Рѣшен. Пусть А имѣетъ x рублей, $B=y$, $D=z$ рубл. и $1000=a$, то по обстоятельствамъ задачи произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x+\frac{1}{2}y=a$, II) $y+\frac{1}{3}z=a$, III) $z+\frac{1}{4}x=a$; посредствомъ коихъ найдемся величина x , изъ I) $x=a-\frac{1}{2}y=\frac{2a-y}{2}$ (P); изъ III) $x=a-z$, или $x=4a-4z$ (Q); но какъ второе уравненіе величины x въ себѣ не заключаетъ, то составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе (P) $\frac{2a-y}{2}=4a-4z$ (Q), въ которомъ по умноженіи каждой части на 2, будемъ $2a-y=8a-8z$, откуда найдемся $8z=8a-2a+y=6a+y$, гдѣ $z=\frac{6a+y}{8}$; потомъ въ уравненіи II) $y+\frac{1}{3}z=a$ будемъ $\frac{1}{3}z=a-y$, а по умноженіи на 3 выйдемъ $z=3a-3y$; напоследокъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ z количествъ уравненіе $3a-3y=\frac{6a+y}{8}$, умножь каждую часть на 8, будемъ $24a-24y=6a+y$, изъ коего найдемся

$24a - 6a = 24y + y$, то есть $18a = 25y$, а по раздѣленіи на 25, найдемся $y = \frac{18a}{25} = \frac{18000}{25} = 720$ деньги человека В, А имѣетъ $x = \frac{2a - y}{2} = \frac{2000 - 720}{2} = 640$; а Д имѣетъ $z = 3a - 3y = 3000 - 2160 = 840$.

Прибавленіе. Послѣку въ каждомъ уравненіи сего рѣшенія больше двухъ неизвѣстныхъ количествъ не находится, то рѣшеніе сего вопроса можно учинить способомъ слѣдующимъ образомъ: сыщи изъ перваго уравненія $x + \frac{1}{2}y = a$ величину y , въ которомъ будетъ $y = 2a - 2x$, потомъ подставь сію величину во второе уравненіи $y + \frac{1}{3}z = a$ вмѣсто y , будетъ $2a - 2x + \frac{1}{3}z = a$. въ коемъ будетъ $\frac{1}{3}z = 2x - a$, а по умноженіи на 3 найдемся $z = 6x - 3a$; подставь сію величину въ третье уравненіи $z + \frac{1}{4}x = a$ на мѣсто z , будетъ $6x - 3a + \frac{1}{4}x = a$, которое умножь на 4, выйдетъ $24x - 12a + x = 4a$, а перенеси величины будетъ $25x = 16a$, откуда найдемся $x = \frac{16a}{25} = \frac{16000}{25} = 640$, $z = 6x - 3a = 3840 - 3000 = 840$, а $y = 2a - 2x = 2000 - 1280 = 720$.

Задача XXIII. На одной батарее находится три кучи ядеръ, изъ коихъ первая съ половиною суммы другихъ составляетъ 1700 ядеръ, вторая съ $\frac{1}{3}$ прочихъ 1700 ядеръ, третья съ $\frac{1}{4}$ прочихъ также составляетъ 1700 ядеръ; спрашивается число ядеръ каждой кучи.

Рѣшен. Посредствомъ предъидущихъ правилъ найдется въ первой кучѣ 500 ядеръ, во второй 1100 ядеръ въ третей 1300 ядеръ.

Задача XXIV. Нѣкто имѣетъ три бочки А, В и С, изъ коихъ ежели бочкою А наполнишь В, то въ А останется еще $\frac{2}{5}$, когдажъ бочкою А наполнишь бочку С, то въ А останется $\frac{5}{9}$, еслижъ бочкою А наполнять будешь бочки В и С, то неостанетъ четырехъ ведръ; спраш. величина каждой бочки.

Въ семѣ вопросѣ найдемся, что бочка А имѣетъ 90 ведръ; бочки В 54 ведр. а число ведръ бочки С=40.

Задача XXV. Три человека А, В и С играли съ карты: въ первую игру А проигралъ прочимъ, сколько каждой изъ нихъ имѣлъ; во вторую игру В проигралъ прочимъ, сколько они тогда имѣли, наконецъ въ третью игру С проигралъ прочимъ, сколько они послѣ второй игры имѣли; по окончаніи же игры у каждою нашлось по 80 рубл-й; спраш. сколько каждой сначала игры имѣлъ.

Рѣшеніе. Положимъ А имѣлъ x рубл. В= y , С= z рубл. и $80=a$, то въ разсужденіи вопроса въ первую игру у А останется $x-y-z$, а В будетъ имѣть $2y$, С= $2z$. Во вторую игру В проигралъ, сколько А и С имѣли, то есть $x-y-z+2z=x-y+z$, и такъ у него останется $2y+y-x-z=3y-x-z$, а прочіе будутъ имѣть вдвое больше, то есть А будетъ имѣть $2x-2y-2z$, а С= $4z$. Въ третью игру С проигралъ сколько А и В имѣли, то есть онъ проигралъ $2x-2y-2z+3y-x-z=x+y-3z$, и такъ у него останется $4z-x-y+3z=7z-x-y$, а прочіе будутъ имѣть вдвое больше, то есть А будетъ имѣть $4x-4y-4z$, а В= $6y-2z-2x$; но какъ послѣ игры, у каждого нашлось по 80 рублей = a ; того ради произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $4x-4y-4z=a$, 11) $6y-2x-2z=a$, 111) $7z-x-y=a$, изъ коихъ выйдетъ величина x , въ первомъ уравненіи будетъ $x=\frac{a+4y+4z}{4}$; во 11) $\frac{6y-2z-a}{2}=x$, изъ 111) $7z-y-a=x$. Потомъ изъ сихъ трехъ равныхъ количествъ составивъ два слѣдующія уравненія: $\frac{a+4y+4z}{4}=\frac{6y-2z-a}{2}$ (D), и $\frac{6y-2z-a}{2}=7z-y-a$ (E), изъ коихъ въ каждомъ найдемся величина y , изъ (D) $\frac{a+4y+4z}{4}=\frac{6y-2z-a}{2}$, по исключеніи знаменателей будетъ $2a+8y+8z=24y-2z-4a$, въ коемъ по перенесеніи величинъ будетъ $2a+4a+8z+8z=24y-8y$, то есть $6a+16z=16y$,

а по раздѣленіи на 16, найдемся $y = \frac{6a+16z}{16} = \frac{3a+8z}{8}$,
 а изъ уравненія (Е) $\frac{6y-2z-a}{2} = 7z-y-a$, по умноженіи
 на 2 будетъ $6y-2z-a = 14z-2y-2a$, въ которомъ по
 переставкѣ членовъ выйдетъ $6y+2y = 14z+2z-2a+a$, то
 есть $8y = 16z-a$, а по раздѣленіи на 8, найдемся $y =$
 $\frac{16z-a}{8} = 2z - \frac{1}{8}a$; наконецъ составя изъ сихъ послѣднихъ
 равныхъ количествъ уравненіе $\frac{1}{8}z - \frac{1}{8}a = \frac{3a+8z}{8}$, то есть
 $1(z-a) = 3a+8z$, переставъ величины изъ одной части
 въ другую, будетъ $16z-8z = 3a+a$ или $8z = 4a$, гдѣ $z =$
 $\frac{4a}{8} = \frac{1}{2}a = \frac{30}{2} = 15$ количеству денегъ С; $B = y = 2z - \frac{1}{8}a$
 $= 40.2 - \frac{30}{8} = 80 - 10 = 70$, $A = x = 7z - y - 1 = 40.7 - 70$
 $= 30 = 130$ рубл.

Задача XXVI. Одинъ Полководецъ имѣетъ
 въ командѣ своей трехъ родовъ военныхъ лю-
 дей, какъ то, Артиллеристовъ, Гранодеровъ и
 Мускетеровъ, съ которыми онъ намеренъ штур-
 мовать городъ, а въ награжденіе общааетъ
 2703 рубли, которые между ими раздѣлитъ
 условился такъ: каждому изъ тѣхъ военныхъ,
 кои начнутъ штурмъ, дать по 1 рублю, а
 прочимъ остальныя раздѣлитъ по ровну. По-
 сему условію нѣшлось: если начнутъ штурмъ
 Артиллеристы, то каждой изъ прочихъ полу-
 читъ только по $\frac{1}{2}$ рубля; когда же начнутъ
 штурмъ Гранодеры, то прочимъ достанется
 по $\frac{1}{3}$ рубля; и наконецъ ежели оной штурмъ
 начнутъ Мускетеры, то каждому изъ прочихъ
 достанется только по $\frac{1}{4}$ рубля; спрашивает-
 ся число каждого званія людей.

Рѣшеніе. Положимъ число Артиллеристовъ x Гра-
 нодеровъ y , Мускетеровъ z , а 2703 рубл. $= a$; то въ раз-
 сужденіи вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія;
 первое

первое когда осаду начнутъ Артиллеристы , то будемъ
 $1.x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = a$, второе когда начнутъ штурмъ Гриво-
 деры, то будемъ $1.y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = a$, третье когда ста-
 кроютъ штурмъ Мускетеры, то будемъ $1.z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = a$;
 изъ коихъ найдемся x слѣдующимъ порядкомъ :

$$I) x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = a \quad II) y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = a \quad III) z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = a$$

$$2x + y + z = 2a$$

$$3y + x + z = 3a$$

$$4z - x + y = 4a$$

$$2x = 2a - y - z$$

$$x = 3a - 3y - z$$

$$x = 4a - 4z - y$$

$$x = \frac{2a - y - z}{1}$$

Попомъ составя изъ сихъ трехъ равныхъ количествъ
 два уравненія, найдемся y , какъ слѣдуетъ :

$$\frac{2a - y - z}{2} = 3a - 3y - z$$

$$4a - 4z - y = 3a - 3y - z$$

$$2a - y - z = 6a - 6y - 2z$$

$$3y - y = 4z - z - 4a + 3a$$

$$6y - y = 6a - 2a - 2z + z$$

$$2y = 3z - a$$

$$5y = 4a + z$$

$$y = \frac{3z - a}{2}$$

$$y = \frac{4a - z}{5}$$

Наконецъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составя
 одно послѣднее уравненіе, найдемся z слѣдующимъ обра-
 зомъ :

$$\frac{5z - 1}{2} = \frac{4a - z}{5}$$

$$15z - 5 = 8a - 2z$$

$$15z + 2z = 8a + 5$$

$$17z = 13a$$

$$z = \frac{13a}{17} = \frac{2703 \times 13}{17} = 2067 \text{ число Мускетеровъ,}$$

$$y = \frac{3z - a}{2} = \frac{2067 \times 3 - 2703}{2} = 1749 \text{ Гранодер. и } x = 3a - 3y - z$$

$$= 2703 \times 3 - 1749 \times 3 - 2067 = 795 \text{ Артиллеристовъ.}$$

Задача. XXVII. Найти три числа такъ,
 чтобы половина перваго съ одною третью
 другаго, и съ четвертью третьяго составля-
 ли число 62, ; также третья часть перваго съ
 чет-

четвертью другого, и съ одною пятою частью третьяго были равны 47, и наконецъ четверть перваго съ одною пятою втораго и съ одною шестою частию третьяго ровнялись 38.

Рѣшен. Положимъ $a=62$, $b=47$, $c=38$, а искомыя три числа x , y и z , по пообстоятельствамъ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = a$, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = b$, $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}z = c$; у которыхъ по исключеніи знаменателей произойдетъ I) $12x + 8y + 6z = 24a$, II) $20x + 15y + 12z = 60b$, III) $30x + 24y + 20z = 120c$. Теперь для уничтоженія z , вычти второе уравненіе изъ перваго, дважды взятаго, также трижды взятое третье уравненіе изъ упрощеннаго втораго уравненія; то въ первомъ случаѣ остатокъ будетъ $4x + y = 48a - 60b$, а во второмъ останется $10x + 3y = 30b - 36c$; наконецъ съ послѣднее уравненіе вычти изъ упрощеннаго предыдущаго уравненія, останется $2x = 144a - 480b + 360c$, которое раздѣля на 2, найдется $x = 72a - 240b + 180c = 24$; но какъ въ уравненіи $4x + y = 48a - 60b$ найдется $y = 48a - 60b - 4x$, того ради $y = 48a - 60b - 4 \cdot 24 = 60$; также изъ уравненія $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = a$, будетъ $\frac{1}{4}z = a - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$, а по умноженіи чрезъ 4, найдется $z = (a - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x) \cdot 4 = 120$

Задача XXVIII. Число 90 раздѣлить на три части такъ, чтобы удвоенная первая часть съ 40, утроенная вторая часть съ 20ю, и учетверенная третья часть съ 10ю были равны между собою.

Рѣшен. Положимъ требуемыя части x , y и z , $90 = a$, $40 = b$, $20 = c$, $10 = d$, то въ разсужденіи вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x + y + z = a$, II) $2x + b = 3y + c$, III) $2x + b = 4z + d$; изъ коихъ для уничтоженія y и z , умножь первое уравненіе чрезъ 12, второе чрезъ 4, а третье чрезъ 3, коихъ общая сумма про-

изве-

изведемъ слѣдующее уравненіе: $26x + 12y + 12z + 7b = 12a$
 $+ 12y + 12z + 4 + 3d$, изъ котораго выйдетъ $x = \frac{12a + 4b}{26}$
 $+ 3d - 7b = 35$; а изъ уравненія $2x + b = 3y + c$ будетъ $2x$
 $+ b - c = 3y$, гдѣ $y = \frac{2x + b - c}{3} = 30$; и $z = a - x - y = 25$.

Задача XXIX. Три osoby А, В и С раздѣлили между собою неизвѣстную сумму денегъ такимъ образомъ, что число денегъ А безъ четырехъ седьминъ прочихъ составляютъ 300 рубл. количество денегъ В безъ трехъ восьминъ прочихъ также равны 300 рублямъ; и наконецъ количество денегъ С безъ двухъ девятинъ денегъ А и В составляютъ ту же сумму; спрашивается часть каждого.

Рѣшен. Положимъ $a = 300$, а требуемыя части x , y и z рублей А, В и С, то по условію вопроса получимъ слѣдующія уравненія:

$$I) \quad x - \left(\frac{4y + 4z}{7} \right) = a \text{ по исключен. знам. } 7x - 4y - 4z = 7a$$

$$II) \quad y - \left(\frac{3x + 3z}{8} \right) = a \quad - \quad - \quad 8y - 3x - 3z = 8a$$

$$III) \quad z - \left(\frac{2x + 2y}{9} \right) = a \quad - \quad - \quad 9z - 2x - 2y = 9a$$

Но дабы въ сихъ уравненіяхъ уничтожить y , то умноживъ первое уравненіе, также умноженное прѣшнее уравненіе, придай въ разнѣ ко второму уравненію, то въ первомъ случаѣ сумма будетъ $7x - 11x = -4x = 22a$ или $x = -2a$, а во второмъ будетъ $-11x + 33x = 22x = 44a$, или $x = 2a$; наконецъ сложа сѣи два послѣднія уравненія вмѣстѣ, выйдетъ $2x = 6a$, а по раздѣленіи на 2, найдемъ $x = 3a = 900 =$ числу денегъ С. Также изъ уравненія $x = 2a$, найдемъ $x = 2a + z = 1200 =$ числу денегъ А, и наконецъ изъ уравненія $y = \frac{(3x + 3z)}{8} = a$, найдемъ $y = a + (x + z) = 1200 =$ числ. денегъ В.

Примѣчан. Хотя изъ трехъ предъидущихъ предложеній явствуемъ, что требуемыя величины сысканы легчайшимъ способомъ противъ прежнихъ рѣшеній;
одна-

однакожъ мало упражняющемуся въ Алгебрѣ или учащемуся оной не всегда можно такъ скоро примѣнить упомянутое уничтоженіе буквъ; по сей причинѣ жопя иѣскольکو и продолжительнѣе, но удобнѣе разрѣшать подобныя вопросы посредствомъ предположенныхъ прамилъ.

Задача. XXX. Сыскать четыре величины такого свойства, чтобы три первыя равны были четвертой съ 50; сумма первой съ третьей и четвертою равна была второй съ 30; сумма первой, второй и четвертой равна была третьей съ 40; и наконецъ сумма второй, третьей и четвертой равна была первой съ 20.

Рѣшен. Въ семъ вопросѣ полагаются четыре неизвѣстныя величины, слѣдовательно и четыре уравненія были должны, посредствомъ коихъ неизвѣстныя величины сыскиваются различными образомъ, какъ-то изъ слѣдующихъ рѣшеній видно.

Положимъ неизвѣстныя величины u, x, y и z ; $50 = a$, $40 = b$, $30 = c$, $20 = d$; то по обстоятельствамъ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія:

$$u + x + y = z + a \quad (A). \quad u + y + z = x + c \quad (C).$$

$$u + x + z = y + b \quad (B). \quad x + y + z = u + d \quad (D).$$

Первой образъ рѣшенія.

1. Сыщи сперва изъ предложенныхъ уравненій величину u , на примѣръ, изъ уравненія A, найдемся $u = z + a - x - y$ (E); поставъ сѣю величину во всѣхъ трехъ уравненіяхъ B, C и D вмѣсто u , опіе чего произойдутъ слѣдующія уравненія:

$$2z - 2y + a = b \quad (F), \quad 2z - 2x + a = c \quad (G), \quad 2x + 2y = a + d \quad (H).$$

2. Сыскавши изъ сихъ трехъ уравненій другую неизвѣстную величину, на примѣръ z въ уравненіи F, въ которомъ будетъ $2z = 2y + b - a$, а по раздѣленіи на 2, найдемся $z = \frac{2y + b - a}{2}$ (I), поставъ оную въ уравненіе G) вмѣсто $2z$, будетъ $2y - 2x + b = c$ (K); уравненіе

же (H) останется нѣ своимъ порядкѣ; послѣду, въ немъ не имѣется буквы z.

3 Слѣди неизвѣстную величину y въ уравненіи (K), отъ чего будетъ $2y = 4x + c - b$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $y = \frac{2x + c - b}{2}$ (M). Поставь сѣю величину въ уравненіе (H) вмѣсто 2y, отъ чего произойдетъ $4x + c - b = a + d$ (L), въ которомъ находишься одна только неизвѣстная буква x, а по перенесеніи величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $4x = a + d + b - c$, по раздѣленіи же на 4 найдется $x = \frac{a + d + b - c}{4} = 20$. Наконецъ посредствомъ сей величины слѣдующія другія неизвѣстныя нѣхъ уравненій, въ которыхъ находишься только буква x, на примѣрѣ: въ уравненіи M, поставь вмѣсто x найденную величину $\frac{a + d + b - c}{4}$, будетъ $y = \frac{a - b + c + d}{4} = 15$; потомъ поставь сѣю величину въ уравненіе (I) на мѣсто y, будетъ $2x = \frac{b + c + d - a}{2}$, а по раздѣленіи на 2 найдется $x = \frac{b + c + d - a}{4} = 10$; наконецъ поставя въ уравненіе (E) найденныя величины x, y, и z, выйдетъ $u = \frac{a + b + c - d}{4} = 25$.

Другимъ образомъ.

Положа прежнія четыре уравненія

$$u + x + y = z + a \text{ (A)}, \quad u + y + z = x + c \text{ (C)}.$$

$$u + x + z = y + b \text{ (B)}, \quad x + y + z = u + d \text{ (D)}.$$

слѣди во всякомъ изъ сихъ уравненій одну неизвѣстную величину, на примѣрѣ u, которая находишься во всѣхъ уравненіяхъ, отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія:

$$u = z - x - y + a \text{ (E)}, \quad u = y - x - z + b \text{ (F)}$$

$$u = x - y - z + c \text{ (G)}, \quad u = x + y + z - d \text{ (H)}$$

Потомъ изъ каждаго двухъ сихъ разныхъ количествъ составь уравненія, по есмь возьми первое со вторымъ, первое съ третьимъ, и первое съ четвертымъ, отъ чего произойдутъ три слѣдующія уравненія:

I) $z - x - y + a = y - x - z + b$, въ коемъ по переставкѣ членовъ будетъ $2z - 2y = b - a$ (I).

II) $z - x - y + a = x - y - z + c$, въ которомъ переставя члены будетъ $2z - 2x = c - a$ (K).

III) $z - x - y + a = x + y + z - d$, въ которомъ по перенесеніи членовъ найдется $2x + 2y = a + d$ (L); изъ коихъ въ двухъ первыхъ уравненіяхъ существуетъ неизвѣстная величина z , какъ слѣдуетъ: $z = \frac{b + 2y - a}{2}$ (M). $z = \frac{c + 2x - a}{2}$ (N).

Изъ сихъ двухъ равныхъ z количествъ составь уравненіе $\frac{2y + b - a}{2} = \frac{2x + c - a}{2}$, или $2y + b - a = 2x + c - a$, въ которомъ $2y + b - c = 2x$, а по раздѣленіи на 2 существуетъ $x = \frac{2y + b - c}{2}$ (P). Потомъ написавъ уравненіе (L) $2x + 2y = a + d$ найдется неизвѣстная $x = \frac{a + d - 2y}{2}$ (Q); но какъ

каждое изъ сихъ послѣднихъ уравненій равныхъ x раздѣлено на 2, того ради составимъ изъ нихъ уравненіе $2y + b - c = a + d - 2y$. въ коемъ по переставкѣ величинъ будетъ $4y = a + d + c - b$, а по раздѣленіи на 4 найдется $y = \frac{a + d + c - b}{4}$ (R). Поставь сіе количество въ уравненіяхъ (M) и (P) на мѣсто y , то будетъ первое $x = \frac{b + c + d - a}{4}$ (S), второе, $x = \frac{a + b - c + d}{4}$ (T); наконецъ поставя въ уравненіе E вмѣсто x , y и z найденныя количества, кои означены буквами (R), (S) и (T) найдется $u = \frac{a + b + c - d}{4}$.

Третій образъ рѣшенія

Подобныя рѣшенія вопросовъ иногда производятся чрезъ сложеніе или вычитаніе нѣсколько разъ уравненій: однакожъ не всегда оное учинить можно, но прежде должно разсмотрѣть условія вопроса, а потомъ уже производить рѣшеніе, какъ здѣсь въ разсужденіи предложенной задачи учинено:

$$u+x+y=z+a$$

$$u+x+z=y+b$$

$$u+y+z=x+c$$

$$x+y+z=u+d$$

Сыщи каждого изъ сихъ уравненій величину какой нибудь буквы, на примѣръ u , отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія:

$$u=z-x-y+a$$

$$u=y-x-z+b$$

$$u=x-y-z+c$$

$$u=x+y+z-d$$

изъ коихъ каждое означаетъ величину одной буквы u . Сложи всѣ сіи уравненія вмѣстѣ, коихъ сумма будетъ

$$4u=a+b+c-d, \text{ гдѣ } u=\frac{a+b+c-d}{4}.$$

Теперь изъ первыхъ четырехъ уравненій сыщи величину буквы x , будетъ

$$x=z-u-y+a$$

$$x=y-u-z+b$$

$$x=u-y-z+c$$

$$x=u-y-z+d$$

Сумма сихъ четырехъ равныхъ величинъ, будетъ

$$4x=a+b-c+d, \text{ гдѣ } x=\frac{a+b-c+d}{4}.$$

Сыщи потомъ изъ первыхъ четырехъ уравненій величину y , будетъ

$$y=z-u-x+a$$

$$y=u-x-z+b$$

$$y=x-u-z+c$$

$$y=u-x-z+d$$

коихъ сумма будетъ $4y=a-b+c+d$, откуда найдется $y=\frac{a-b+c+d}{4}.$

Наконецъ изъ первыхъ четырехъ уравненій найдется z , какъ-то

$$z=u+x+y-a$$

$$z=y-u-x+b$$

$$z=x-u-y+c$$

$$z=u-x-y+d$$

коихъ сумма $4z = a + c + b - a$, а по раздѣленіи на 4
будетъ $z = \frac{a + c + b - a}{4}$, гдѣ также $u = 25$, $x = 20$, $y = 15$,
и $z = 10$.

Задача. XXXI. Число 90 раздѣлить на 4
части такъ, чтобы первая часть съ 5 ю,
вторая безъ 4, третья умноженная тремя,
а четвертая раздѣленная на 2, были равны
между собою.

Рѣшен. Положимъ искомыя части u , x , y и z , а 90
 $= a$, то въ разсужденіи вопроса произойдутъ слѣдую-
щія уравненія: $u + x + y + z = a$, $u + 5 = x - 4 = 3y = \frac{z}{2}$, от-
куда будетъ I) $u + 5 = x - 4$, II) $u + 5 = 3y$, III) $u + 5 = \frac{z}{2}$.

Сыщи каждаго изъ четырехъ уравненій величину
буквы u , 1) $u = x - 9$, II) $u = 3y - 5$, III) $u = \frac{z - 10}{2}$, а
изъ уравненія $u + x + y + z = a$ выйдетъ $u = a - x - y - z$, по-
томъ изъ сихъ четырехъ равныхъ количествъ составъ
три слѣдующія уравненія: $x - 9 = 3y - 5$ (A).

$$x - 9 = \frac{z - 10}{2} \text{ (B).}$$

$$x - 9 = a - x - y - z \text{ (C).}$$

Сыщи въ каждомъ изъ сихъ трехъ уравненій величи-
ну x какъ-то: изъ уравненія (A) будетъ $x = 3y + 4$.

Изъ (B) выйдетъ $x = \frac{z + 8}{2}$; изъ (C) найдется $2x = a +$

$-y - z$, гдѣ $x = \frac{a + 9 - y - z}{2}$, потомъ изъ сихъ найденныхъ

трехъ равныхъ количествъ составъ два слѣдующія ура-

венія: $3y + 4 = \frac{z + 8}{2}$ (D).

$$3y + 4 = \frac{a + 9 - y - z}{2}.$$

или $6y + 8 = a + 9 - y - z$ (E).

К 2

изъ

изъ коихъ въ уравненіи (D) сыщется $3y = \frac{z}{2}$ или $6y = z$,
 то есть $y = \frac{z}{6}$ (F). Поставъ $6y$ въ уравненіе (E) вый-
 сто z , будетъ $6y + 8 = a + 9 - y - 6y = a + 9 - 7y$, откуда найде-
 тся $13y = a + 1$, гдѣ $y = \frac{a+1}{13} = \frac{91}{13} = 7$. Въ уравненіи (F)
 $z = 6y = 42$, $x = 3y + 4 = 25$, и $u = x - 9 = 16$.

Другимъ образомъ :

Рѣшеніе сего вопроса можно произвести и одною бу-
 жвою, какъ слѣдуетъ: положимъ, четвертая часть $= x$.
 И такъ когда три раза взятая третья часть равна
 $\frac{x}{2}$, то она будетъ $\frac{x}{2} : 3 = \frac{x}{6}$; вторая же часть
 4 ю меньше $\frac{x}{2}$, по сему она часть будетъ $\frac{x}{2} + 4$; также
 первая часть 5 ю больше $\frac{x}{2}$, слѣдовательно она будетъ $\frac{x}{2}$
 $+ 5$. По сей причинѣ сумма всѣхъ сихъ частей имѣетъ
 взятыхъ, будетъ $x + \frac{x}{6} + \frac{x}{2} + 4 + \frac{x}{2} + 5 = a$, то есть $2x + \frac{x}{6}$
 $+ 9 = a$, откуда найдется $13x = (a + 1) \cdot 6 = 91 \cdot 6$, а по
 раздѣленіи на 13 найдется $x = 42$ четвер. часть, $\frac{x}{6} = \frac{42}{6}$
 $= 7$ третья часть, $\frac{x}{2} + 4 = 25$ вторая часть, и на-
 конецъ первая часть $\frac{x}{2} + 5 = 16$.

или :

Положимъ, первая часть x , которая съ 5 ю ра-
 вна второй части безъ 4, то вторая часть бу-
 детъ $x + 5 + 4 = x + 9$; третья, прижды взятая, равна
 первой съ 5 ю, по сему она будетъ $\frac{x+5}{3}$; четвертая
 часть раздѣленная на 2, также равна первой съ 5,
 слѣдовательно она будетъ $(x+5) \cdot 2 = 2x + 10$; и такъ сум-
 ма всѣхъ сихъ частей, вышедъ взятыхъ, будетъ $x + x + 9 +$
 $\frac{x+5}{3} + 2x + 10 = 4x + \frac{x+5}{3} + 19 = a$, а по умноженіи на

будетъ $12x + x + 5 + 57 = 3a$, откуда найдется $13x = 3a - 62$, а по раздѣленіи на 13, будетъ $x = \frac{3a - 62}{13}$ = 16 первая часть, $x + 9 = 25$ вторая часть, $\frac{x + 5}{5} = 7$ третья, и $2x + 10 = 42$ четвертая, поже, что и прежде.

Задача. XXXII. Два источника уравненнаго движенія наполняютъ вмѣстѣ прудъ А, такъ что первой продолжалъ въ теченіи время b , другой время d ; тѣжъ источники наполняютъ другой прудъ Е, одинъ продолжалъ въ теченіи время e , а другой n : спрашивается, какъ велико изтеченіе источниковъ въ часъ, то есть сколько бочекъ или ведръ каждой можетъ наполнить въ часъ.

Рѣшен. Положимъ, что первой наполнилъ въ часъ x бочекъ, второй y . И такъ умножь время b числомъ бочекъ x , произведеніе bx будетъ равно количеству изпеченія первого источника во время b ; потомъ умножь d чрезъ y , произведеніе dy будетъ равно количеству изпеченія второго источника, коихъ сумма $bx + dy = A$; по сей же причинѣ $ex + ny = E$. Изъ первого уравненія $bx + dy = A$ найдется $bx = A - dy$, а по раздѣленіи на b , выйдетъ $x = \frac{A - dy}{b}$; изъ второго уравненія $ex + ny = E$ выйдетъ $ex = E - ny$, а по раздѣленіи на e найдется $x = \frac{E - ny}{e}$; потомъ составя изъ упомянутыхъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{A - dy}{b} = \frac{E - ny}{e}$, умножь каждую часть чрезъ b и чрезъ e , выйдетъ $A - dy = Eb - eny$; по перенесеніи же величинъ будетъ $bny - dy = Eb - Ae$, откуда найдется $y = \frac{Eb - Ae}{bn - de}$; и наконецъ по сему известному количеству найдется

количество x . Положимъ, прудъ A содержитъ въ себѣ 90 бочекъ, $b=3$ часамъ, $d=5$ часамъ. Второй прудъ $E=64$ бочк. $e=2$ час. $n=4$ час. то будетъ $y = \frac{64 \times 3 - 90 \times 2}{3 \times 4 - 5 \times 2} = \frac{12}{2} = 6$ бочек. изтеченіе второго источника въ часъ, а изтеченіе первого $x = \frac{A - dy}{2} = \frac{90 - 5 \cdot 6}{3} = 20$.

Задача. XXXIII. Дано число кучекъ n изъ картъ, изъ коихъ каждая кучка такъ разположена, что число очковъ нижней карты съ числомъ картъ, сверхъ оной положенныхъ, составляетъ известное число p , а остальныхъ отъ разположенія кучекъ картъ d ; спрашивается число латентъ или очковъ, въ нижнихъ картахъ содержащееся.

Рѣшен. Положимъ, въ игрѣ число картъ m , число очковъ нижнихъ картъ въ первой кучкѣ u , во второй x , въ третьей y , въ четвертой z и проч.: по своему вопросу, число всѣхъ картъ въ первой кучкѣ будетъ $p+1-u$ (поскольку когда къ числу верхнихъ картъ съ числомъ очковъ нижней карты, то есть къ p придася одна нижняя карта, то число всѣхъ картъ съ числомъ пятенъ u нижней карты, будетъ въ кучкѣ $p+1$; еслижъ изъ сего числа вычтется число очковъ нижней карты u , то останется число однихъ картъ первой кучки $= p+1-u$, во второй будетъ $p+1-x$, въ третьей $p+1-y$, въ четвертой $p+1-z$ и такъ далѣе, коихъ общая сумма съ остальными картами равна числу картъ m ; то есть, $(p+1-u) + (p+1-x) + (p+1-y) + (p+1-z) +$ и проч. $+ d = m$; изъ сего видно, что $p+1$ столько разъ берется, сколь велико число кучекъ, по сей причинѣ $(p+1)n - (u+x+y+z+ \text{ и проч.}) + d = m$, а по перенесеніи членовъ изъ одной части уравненія въ другую, будетъ $(p+1)n + d - m = u+x+y+z+ \text{ и проч.}$ равно числу очковъ нижнихъ картъ, то есть: когда счисланное число верхнихъ картъ съ нижними пятнами сложится съ еди-

единицею, потомъ умножится числомъ кучекъ n , и къ сему произведенію придастся число остальныхъ картъ, а наконецъ вычтется число картъ m всей игры; то остатокъ покажетъ число очковъ въ нижнихъ картахъ.

Дабы имѣть о семъ ясное понятіе, то положимъ, что въ игрѣ было 36 картъ, гдѣ означаетъ валецъ 2 очка, дама 3, король 4, а тузъ 11; и что карты разложены были на шесть кучекъ, и число очковъ нижней карты съ числомъ верхнихъ картъ каждой кучки считано до принадежности, а нижнія карты положены были слѣдующія:

Кучки	1	2	3	4	5	6 я.
ниж. карт.	7 рва.	туз.	10 ка	9 ка	туз.	8 рва
числ. ихъ очк.	7 +	11 +	10 +	9 +	11 +	8 = 56:
то число верхнихъ картъ, положено на нижнюю карту	6 +	2 +	3 +	4 +	2 +	5 = 22.

И такъ число верхнихъ картъ съ нижними будетъ $22+6=28$, остальныхъ картъ будетъ 8; то по свойству общаго правила, будетъ $(13+1) \times 6 + 8 - 36 = 14 \times 6 + 8 - 36 = 56 =$ числу очковъ нижнихъ картъ.

Такимъ же образомъ познается число очковъ въ нижнихъ картахъ, если въ игрѣ будетъ 52 карты, гдѣ тузъ значить 1, валецъ 11, дама 12, а король 13.

Примѣч. Если при начотѣ картъ до какого нибудь числа на нижнее число очковъ не будетъ достать на послѣднюю кучку, на прим. d картъ; то уравненіе будетъ слѣдующее: $(p+1)n - d - m = n + x + y + z +$ и проч. или $(p+1)n - (d+m) = n + x + y + z +$ и проч. $=$ числу очковъ нижнихъ картъ, то есть, когда къ числу верхнихъ картъ съ числомъ очковъ нижнихъ картъ придастся единица, и сумма ихъ умножится чрезъ число кучекъ, а изъ сего произведенія вычтется число картъ всей игры съ числомъ не достающаго числа картъ въ послѣднюю кучку, то разность покажетъ число очковъ въ нижнихъ картахъ.

О уравненіяхъ второй степени.

§ 127. *Опредѣл.* Чистое второй степени уравненіе именуется *по*, въ которомъ неизвѣстная величина есть второй степени, на примѣръ, $x^2 + b = d^2$. Смѣшанное квадратное уравненіе есть *по*, въ которомъ находится неизвѣстная величина второй и первой степени перемѣшаны съ другими, какъ на прим. $x^2 + ax = bd$, или $bx^2 - x = c^2$ и проч.

§ 128. *Задача.* Въ данномъ числомъ уравненіи второй степени найти неизвѣстную величину.

Рѣшен. Положимъ, данное уравненіе будетъ на примѣръ $x^2 + a = d$, то перенеся величину a изъ первой части уравненія въ другую, будетъ $x^2 = d - a$, потомъ извлеки квадратные корни изъ обѣихъ частей уравненія, найдется требуемая величина $x = \pm \sqrt{d - a}$. Пусть будетъ $a = 3$, $d = 28$, то $\sqrt{x^2} = \pm x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$ (§ 86); ибо $+5 \times +5 = -5 \times -5 = 25$.

Ежели уравненіе будетъ на прим. $bx^2 = c$, то по раздѣленіи обѣихъ частей на количество b , будетъ $x^2 = \frac{c}{b}$, а по извлеченіи квадратныхъ корней найдется $\sqrt{x^2} = \pm x = \pm \sqrt{\frac{c}{b}}$.

Примѣры чистаго второй степени уравненія.

Задача I. Сыскашь число, котораго $\frac{1}{4}$, умноженная одною восьмою частію тогоже числа, производитъ число 128.

Рѣ.

Рѣшен. Положимъ искомое число x , и $128 = a$, то по условію вопроса будетъ $\frac{1}{4}x \times \frac{1}{8}x = a$, то есть $\frac{x^2}{32} = a$, а по умноженіи на 32, выйдетъ $x^2 = 32a$. наконецъ по извлеченіи квадратныхъ корней сыщется $x = \sqrt{32a} = \pm \sqrt{4096} = 64$, въ которомъ $64 \times \frac{1}{4} = 16$, и $64 \times \frac{1}{8} = 8$, коихъ произведеніе $16 \times 8 = 128$.

Задача II. Найти число, къ которому ежели придано будетъ 5, и тоже число изъ него вычтется, потомъ первая сумма на сію разность умножится, то бы произведеніе было 96.

Рѣшен. Положимъ искомое число x , $5 = a$, и $96 = b$, то въ разсужденіи вопроса, произойдетъ слѣдующее уравненіе: $(x + a) \times (x - a) = b$, то есть $x^2 - a^2 = b$; придай къ обѣимъ частямъ a^2 , будетъ $x^2 = b + a^2$; потомъ извлеки корень квадрата, найдетъся $x = \pm \sqrt{(b + a^2)} = \sqrt{121} = 11$. И такъ $x + 5 = 16$, и $x - 5 = 6$; по сему $16 \times 6 = 96$.

Задача III. На одной батарее находилось нѣсколько пушекъ, изъ каждой выстрѣлено зарядовъ въдесятеро больше числа пушекъ; каждые 25 зарядовъ убивали непріятеля вдвое больше числа пушекъ; еслилижъ соую часть убитыхъ умножить чрезъ $\frac{5}{9}$, то выйдетъ число пушекъ; коихъ число найти требуется.

Рѣшен. Положимъ число пушекъ x : когда каждая выстрѣлила $10x$, то число всѣхъ выстрѣловъ будетъ $10x^2$, каждые 25 выстрѣловъ убивали по $2x$, то число убитыхъ будетъ

$10x^2 \times \frac{2x}{25} = \frac{20x^3}{25} = \frac{4x^3}{5}$; соная часть сего числа, по
 есть $\frac{4x^3}{500}$ умноженная $\frac{5}{9}$ выйдетъ $\frac{20x^3}{4500} = \frac{x^3}{225}$, равно
 числу пушекъ: и такъ произойдетъ уравненіе
 $\frac{x^3}{225} = x$, или $x^3 = 225x$, а по раздѣленіи на x
 выйдетъ $x^2 = 225$, въ которомъ по извлеченіи
 корней найдется $x = 15$.

Задача IV. Извѣстна сумма двухъ чиселъ
 $= a$, произведеніе ихъ $= b$: найди оныя числа.

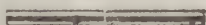
Рѣшен. Положимъ разность требуемыхъ чи-
 селъ $= x$: то большее число будетъ $\frac{a+x}{2} + \frac{x}{2} =$
 $\frac{a+x}{2}$, а меньшее $\frac{a-x}{2}$ (§ 122 Задача VIII), ко-
 ихъ произведеніе будетъ $(\frac{a+x}{2}) \times (\frac{a-x}{2}) = \frac{a^2 - x^2}{4}$
 $= b$; а по умноженіи чрезъ 4 будетъ $a^2 - x^2$
 $= 4b$, въ коемъ $a^2 - 4b = x^2$; а по извлеченіи изъ
 обѣихъ частей квадратнаго корня, найдется
 $x = \pm \sqrt{a^2 - 4b}$. Положимъ, что $a = 14$, $b = 48$;
 то будетъ $x = \pm 2$, и два искомыхъ числа $7 + 1$
 и $7 - 1$, то есть 8 и 6 *). Еслилижъ будетъ
 $a = 4$ и $b = 5$, то будетъ $x = \pm \sqrt{-4}$, коли-
 чество невозможное, опъ котораго два прѣбуе-
 мыя числа, коихъ бы сумма была 4, а произве-
 деніе 5, произойти не могутъ.

Задача V. Извѣстна разность и произведе-
 ніе двухъ чиселъ; сыскай оныя числа

Рѣшен. Положимъ разность чиселъ $= a$, про-
 изведеніе $= b$, а сумма неизвѣстныхъ чиселъ
 $= x$

*) Рѣшеніе сего вопроса относится къ Геометрической
 задачѣ второй Части § 176.

$=x$: то будетъ большое число $=\frac{a+x}{2}$, а мень-
 шое $=\frac{x-a}{2}$ (§ 122 Задача VIII), коихъ произведе-
 ніе будетъ $(\frac{x+a}{2}) \times (\frac{x-a}{2}) = \frac{x^2-a^2}{4} = b$, или x^2-a^2
 $=4b$, гдѣ $x^2=4b+a^2$, а по извлеченіи корней
 найдемся $x=\pm\sqrt{4b+a^2}$. Положимъ $a=4$,
 $b=96$, то будетъ $x=\pm\sqrt{384+16}=\pm 20$,
 откуда найдемся большое число $10+2=12$
 а меньшее $10-2=8$ *).



О смѣшанныхъ второй степени ура- вненіяхъ.

§ 129. Задача. Въ смѣшанномъ вѣпорой сте-
 пени уравненіи найди неизвѣстную величину.

Рѣшен. Положимъ, что смѣшанное квадра-
 тное уравненіе будетъ $x^2+2ax=b^2$; то изъ сего
 легко усмотрѣшь можно, что первая часть сего
 уравненія есть неполной квадратъ: ибо ежели
 корень состоиптъ изъ двухъ частей, какъ на
 примѣръ $x+a$, то квадратъ онаго долженъ
 бытъ изъ трехъ членовъ (§ 59), заключающихъ
 въ себѣ квадраты обѣихъ частей, и двойное
 произведеніе первой части на вѣпорую; слѣдова-
 тельно въ семъ уравненіи x^2 почтеться мо-
 жетъ квадратомъ первой части, а $2ax$ будетъ
 двойное произведеніе первой части на вѣпорую,
 слѣдовательно $\frac{2a}{2}=a$ есть вѣпорая часть корня.
 И такъ дабы сдѣлать первую часть уравненія
 со-

*) Сей вопросъ относится къ § 179 тойже Части.

совершеннымъ квадратомъ, по придай квадратъ изъ половины предстоящаго неизвѣстной величины x , то есть $(\frac{2a}{2})^2 = a^2$ къ обѣимъ частямъ уравненія, опѣ чего произойдетъ слѣдующее уравненіе: $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + a^2$; а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня, будетъ $x + a = \pm \sqrt{(b^2 + a^2)}$; естлижъ изъ каждой части сего уравненія вычтется величина a , то найдется $x = -a \pm \sqrt{(b^2 + a^2)}$.

Ежели уравненіе будетъ $x^2 - px = -q$, то величина px , также будетъ двойное произведеніе первой части на вторую, въ коемъ $-\frac{p}{2}$ будетъ вторая часть корня; и такъ дабы первую часть уравненія сдѣлать совершеннымъ квадратомъ, по придай къ обѣимъ частямъ уравненія, квадратъ изъ половины предстоящаго $-p$, то есть $\frac{1}{4}p^2$, опѣ чего выйдетъ слѣдующее уравненіе: $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня, будетъ $x - \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ или $x - \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{(\frac{p^2 - 4q}{4})}$, въ коемъ перенеся извѣстную величину изъ первой части во вторую, найдется $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{p^2 - 4q}{4})}$; но какъ корень знаменателя 4 есть 2, по сей причинѣ будетъ $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Примѣчан. I. Ежели въ такомъ уравненіи, величина q будетъ меньше, нежели $\frac{1}{4}p^2$: то два искомые корни будутъ дѣйствительные; естлижъ q будетъ больше $\frac{1}{4}p^2$, то искомые корни будутъ невозможные, или мнимые; ибо пусть
бу-

будетъ $\frac{1}{4}p^2 - q = -cc$, то $\sqrt{-cc}$ есть количество невозможное (§ 87). Когда будетъ $-q = \frac{1}{4}p^2$, то $\frac{1}{4}p^2 - q = 0$, по сему будетъ $x = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{0} = \frac{p}{2} \pm 0 = \frac{1}{2}p$, то есть оба корня равны будутъ $\frac{1}{2}p$.

Примѣчан. II. Ежели уравненіе будетъ слѣдующее: $-ax^2 + 2abx = d$, то дабы x^2 не имѣлъ никакого предстоящаго, кромѣ единицы, раздѣли оба члѣна уравненія на предстоящее a , отъ чего произойдетъ $-x^2 + 2bx = \frac{d}{a}$; а чѣмбъ сдѣлать $-x^2$ положительнымъ, то перемѣня знаки всего уравненія въ пропивные (§ 123), будетъ $x^2 - 2bx = -\frac{d}{a}$, въ которомъ по предписанному правилу найдется $x = b \pm \sqrt{(b^2 - \frac{d}{a})}$.

Слѣдст. Изъ предписанныхъ предложеній видно, что неизвѣстное количество, на примѣръ x , всегда будетъ равно половинѣ предстоящаго простой величины x съ пропивнымъ знакомъ и квадратному корню $+$ или $-$ изъ второй члѣсти уравненія съ квадратомъ половины предстоящаго помянутой величины x , на примѣръ: еслили бы случилось уравненіе $x^2 - 6x = 7$, то бы нашлось, что $x = 3 \pm \sqrt{(7 + 9)} = 3 \pm 4$, то есть въ первомъ случаѣ будетъ $x = 7$, а во второмъ $x = -1$.

Прибавлен. Всякое смѣшанное второй степени уравненіе, на примѣръ $x^2 + ax = b$, можно обратить въ чистое квадратное уравненіе слѣдующимъ образомъ: положимъ, что корень x перваго члена x^2 съ половиною предстоящаго простой величины x будетъ равенъ y , то есть $x + \frac{1}{2}a = y$, въ которомъ ежели величина $\frac{1}{2}a$ пере-

несется

несется въ другую часть уравненія, то будетъ $x = y - \frac{1}{2}a$; отъ сего произойдетъ $x^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$, и $ax = (y - \frac{1}{2}a) \cdot a = ay - \frac{1}{2}a^2$; еслиижъ два сїа уравненія сложатся вмѣстѣ, то будетъ $x^2 + ax = y^2 - \frac{1}{4}a^2 = bd$, въ коемъ переставя величину $\frac{1}{4}a^2$ изъ первой части во вторую, произойдетъ чистое квадратное уравненіе $y^2 = bd + \frac{1}{4}a^2$, а по извлеченіи квадратнаго корня будетъ $y = \pm \sqrt{bd + \frac{1}{4}a^2}$ откуда найдется $x = y - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{bd + \frac{1}{4}a^2}$.

Примѣры смѣшаннаго второй стелени уравненія.

Задача I. Найди число, котораго ежели $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ умножатся между собою, и къ сему произведенію придастся $\frac{1}{2}$ искомаго числа, то бы вышло 30.

Рѣшен. Пусть искомое число x , то въ сужденіи вопроса будетъ $\frac{1}{2}x \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x^2$, къ сему приложя $\frac{1}{2}x$, сумма будетъ $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x = 30$, или $\frac{x^2 + 3x}{6} = 30$, а по умноженіи на 6, выйдетъ $x^2 + 3x = 180$; придай къ каждой части уравненія квадратъ изъ половины предстоящаго величины x , будетъ $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 180 + \frac{9}{4}$; попомъ извлеки изъ каждой части уравненія квадратной корень, выйдетъ $x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{180 + \frac{9}{4}} = \pm 13\frac{1}{2}$, въ которомъ по перенесеніи $\frac{3}{2}$ изъ первой части во вторую, найдется $x = \pm 13\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 12$ или $x = -15$ (9 86).

Задача. II. Дядя говоритъ племяннику: ежели изъ квадратнаго числа пѣхъ денегъ, кои

я тебѣ подарить намѣренъ, вычтется 4 раза взятое число денегъ, то остатокъ будетъ 5 рублей; спрашив. число денегъ, кои дядя племяннику подарить желаетъ.

Рѣшен. Положимъ, число денегъ будетъ x , и $5=a$, то въ разсужденіи вопроса будетъ квадратъ онаго числа x^2 , а учетверенное число $4x$, по сему $x^2-4x=a$, откуда найдется $x=2\pm\sqrt{(a+4)}=2\pm\sqrt{9}=2\pm 3$, то есть $x=5$ или $x=-1$.

Примѣчан. I. Изъ сего видно, что первый корень 5 есть подлинное въ разсужденіи вопроса искомое число; ибо квадратъ изъ 5 безъ $4x=5$. Но второй корень -1 , въ рѣшеніи сего вопроса заключающійся, хотя въ уравненіи и представляетъ мнимую величину, однакожъ можетъ быть принятъ требуемымъ числомъ; поелику когда сѣ учетверенное число вычтется изъ квадрата онаго, то остатокъ будетъ также $=5$.

Примѣчан. II. Еслибы въ вопросѣ пребовалось, чѣобы остатокъ былъ $=-13$, то бы нашлось, что $x=2\pm\sqrt{(-13+4)}$ или $x=2\pm\sqrt{-9}$; но корень изъ -9 есть к. число невозможное или мнимое; ибо всякое число, само собою умножающееся, не можетъ произвести -9 (потому что $+3x+3=-9=-3x-3=-9$); слѣдственно такой вопросъ будетъ невозможной (§ 87): чѣмъ и всѣ другія подобныя сему вопросу несправедливости опровергаются.

Задача III. Найди два числа, изъ коихъ одно вдвое больше другаго, а сумма ихъ съ произведеніемъ составляютъ 90.

Рѣшен. Положимъ искомое число x , большее будетъ $2x$, $90=a$, то сумма ихъ съ произведеніемъ будетъ $2x^2+3x=a$; раздѣли на 2, выйдетъ $x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}a$; откуда найдется $x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{(\frac{a}{2}+\frac{9}{16})}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{45+\frac{9}{16}}=-\frac{3}{4}\pm\frac{27}{4}$, по сему $x=6$ или $x=-7\frac{1}{2}$.

Задача IV. Сыскапъ два числа, коихъ разность $= d$, и когда количество a раздѣлился на оба искомыхъ числа, то бы разность частныхъ была $= b$.

Рѣшен. Положимъ меньшее число x , большее будетъ $x + d$: и такъ по силѣ вопроса будетъ $\frac{a}{x} - \frac{a}{x+d} = b$, а по изключеніи дробей будетъ $bx^2 + bdx = ax + ad - ax$ или $bx^2 + bdx = ad$; раздѣли на b выдетъ $x^2 + dx = \frac{ad}{b}$; откуда найдется $x = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ad}{b} + \frac{d^2}{4}\right)} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ad+bd^2}{4b}\right)}$. Положимъ что $a=72$, $d=4$, $b=3$, то найдется $x = -2 \pm \sqrt{100} = 10-2$. И такъ меньшее число будетъ $10-2=8$, а большее $10+2=12$.

Задача V. Найди число, котораго бы квадратъ безъ 9 ти тѣмъ превышалъ число 100, чѣмъ искомое число меньше 23.

Рѣшен. Пусть будетъ искомое число x , то въ разсужденіи вопроса x^2-9 превышаетъ число 100 количествамъ x^2-109 , а искомое число x , меньше 23 количествомъ $23-x$; отъ чего произойдетъ уравненіе $x^2-109=23-x$, а переставя величины изъ одной части въ другую найдется $x^2+x=132$, въ которомъ $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(132 + \frac{1}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2} = 11$, а въ другомъ случае $x = -12$.

Задача VI. Въ уравненіи $3\sqrt{2x+8} = 3x+5$, сыскапъ неизвѣстную величину x .

Рѣ-

Рѣшен. Вычти изъ обѣихъ частей уравненія 8, останется $3\sqrt{2x} = 3x - 3$; раздѣли на 3 выйдетъ $\sqrt{2x} = x - 1$; попомъ возвысь каждую часть во вторую степень, будетъ $2x = x^2 - 2x + 1$ или $x^2 - 4x = -1$, откуда найдется $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Задача. VII. Количество a раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы половина квадрата первой части равна была двумъ претямъ квадрата второй части.

Рѣшен. Положимъ меньшее число x , большее будетъ $a - x$; изъ коихъ квадратъ большаго количества будетъ $a^2 - 2ax + x^2$, а меньшаго x^2 , и такъ по свойству вопроса будетъ $(a^2 - 2ax + x^2) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x^2$, то есть $\frac{a^2 - 2ax + x^2}{2} = \frac{2x^2}{3}$, а по исключеніи знаменателей выйдетъ $3a^2 - 6ax + 3x^2 = 4x^2$; откуда найдется $x^2 + 6ax = 3a^2$, когдажъ къ обѣимъ частямъ придастся квадратъ изъ половины предстоящаго x , то выйдетъ $x^2 + 6ax + 9a^2 = 12a^2$, а по извлеченіи квадратныхъ корней найдется $x + 3a = \pm \sqrt{12a^2}$, гдѣ $x = -3a \pm \sqrt{12a^2}$; а большее число $= 4a - \sqrt{12a^2}$. Положимъ, что $a = 10$, то будетъ $x = -30 \pm \sqrt{1200} = -30 \pm 20\sqrt{3}$; а большее $= 40 - 20\sqrt{3}$.

Задача. VIII. 300 человекъ войска построены были такъ, что въ шеренгѣ 97 ю человекъ больше, нежели въ ряду; спрашивается число людей въ шеренгѣ и въ каждомъ ряду.

Рѣшен. Положимъ $300 = a$, $97 = b$, въ каждомъ ряду $= x$, то въ шеренгѣ будетъ $x + b$. И такъ число людей въ спрону будетъ $(x + b) \times x = x^2 + bx = a$, откуда найдемся $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{4} + \frac{b^2}{4}\right)} = 3 =$ числу людей въ ряду, а въ шеренгѣ будетъ $x + b = 3 + 97 = 100$.

Задача IX. Сыскавъ два числа, коихъ сумма $= 13$, а произведеніе ихъ съ меньшимъ числомъ, прижды взятымъ, составляетъ число 55.

Рѣшен. Положимъ $13 = a$, $55 = b$, разность искомыхъ чиселъ $= x$, то большее число будетъ $\frac{a+x}{2}$, меньшее $\frac{a-x}{2}$, коихъ произведеніе $\left(\frac{a+x}{2}\right) \times \left(\frac{a-x}{2}\right) = \frac{a^2 - x^2}{4}$, а прижды взятое меньшее число $= \left(\frac{a-x}{2}\right) \times 3 = \frac{3a - 3x}{2}$; коихъ сумма $\frac{a^2 - x^2}{4} + \frac{3a - 3x}{2} = b$, или $\frac{a^2 - x^2 + 6a - 6x}{4} = b$; умножь каждую часть чрезъ 4, будетъ $a^2 - x^2 + 6a - 6x = 4b$, а переставя члены изъ одной части въ другую, выйдетъ $-x^2 - 6x = 4b - a^2 - 6a$; или $x^2 + 6x = a^2 + 6a - 4b$; откуда найдемся $x = -3 \pm \sqrt{(a^2 + 6a - 4b + 9)} = 3$, меньшее число $\frac{a-x}{2} = 5$, а большее $\frac{a+x}{2} = 8$.

Задача X. Найти число, коего квадратъ, сложенной съ произведеніемъ изъ разности количествъ a и b и искомага числа, производимъ c^2 .

Рѣшен. Положимъ искомое число x , то по условію вопроса будетъ $x^2 + (a - b) \cdot x = c^2$; придай къ обѣимъ частямъ квадратъ изъ поло-

вины

вины предстоящаго $a - b$, будетъ $x^2 + (a - b)x + (\frac{a-b}{2})^2 = c^2 + (\frac{a-b}{2})^2$, а по извлеченіи квадратнаго корня, найдемся $x = -(\frac{a-b}{2}) \pm \sqrt{c^2 + (\frac{a-b}{2})^2}$. Положимъ $a = 3$, $b = 2$, $c^2 = 16$, найдемся $x = -(\frac{3-2}{2}) \pm \sqrt{16 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}$.

Задача XI. Нѣкто купилъ неизвѣстное число концовъ сукна за 180 рублей, и есѣли бы за тѣхъ деньги можно было купить того сукна при конца больше, то бы каждой кусокъ обошелся ему 3 мя рублями дешевле; спрашивается, сколько концовъ сукна куплено.

Рѣшен. Положимъ число концовъ x , то по силѣ вопроса, цѣна каждого конца будетъ $\frac{180}{x}$, а есѣли бы онѣ купилъ $x + 3$ конца, то бы цѣна каждого $\frac{180}{x+3}$ была 3 мя рублями меньше; по сей причинѣ $\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$, умножь каждую часть уравненія сперва на x , а потомъ на $x + 3$, будетъ $180x = 180x - 3x^2 + 540 - 9x$, въ коемъ по переспавкѣ величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $3x^2 + 9x = 540$, раздѣли на 3, выйдетъ $x^2 + 3x = 180$, откуда найдемся $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(180 + \frac{9}{4})} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{27\frac{1}{4}}$; слѣдовательно въ первомъ случаѣ $x = 12$, а во второмъ $x = -15$.

Задача XII. Извѣстна сумма чиселъ $= a$, и сумма ихъ квадратовъ $= b$, найди оныя числа.

Рѣшен. I. Положимъ искомыя числа x и y ; то произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x + y = a$; II) $x^2 + y^2 = b$; возвысь каждую часть перваго уравненія во вторую степень, будетъ $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, вычти изъ сего уравненія второе, останется $2xy = a^2 - b$; вычти сіе уравненіе изъ втораго, останется $x^2 - 2xy + y^2 = 2b - a^2$, потомъ извлеки корень квадрата, выйдетъ $x - y = \pm \sqrt{2b - a^2}$; придай сіе уравненіе къ первому, а напоследокъ оное вычти изъ первагожъ, то въ первомъ случаѣ найдется $x = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2}$, а во второмъ $y = \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}$.

Рѣшен. II. Положимъ разность данныхъ чиселъ $= x$, то будетъ большое число $\frac{a+x}{2}$, меньшее $\frac{a-x}{2}$; и такъ будетъ квадратъ большаго количества $\frac{a^2 + 2ax + x^2}{4}$, а квадратъ меньшаго числа $\frac{a^2 - 2ax + x^2}{4}$, коихъ сумма $\frac{a^2 + x^2}{2} = b$, или $a^2 + x^2 = 2b$, гдѣ $x^2 = 2b - a^2$ а по извлеченіи квадратнаго корня найдется $x = \pm \sqrt{2b - a^2}$; и такъ большое число будетъ $\frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2}$, а меньшее $\frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}$. Пустьъ $a = 11$, $b = 65$, то будетъ $x = \pm \sqrt{130 - 121} = \pm \sqrt{9} = \pm 3$. По сему большое число будетъ $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7$, а меньшее $5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 4$ *).

За-

*) Посредствомъ сего вопроса разрѣшается Геометрическая задача (§ 178 Часть II).

Задача XIII. Требуется два числа, x и y положишельныя, коихъ бы произведеніе было $= a$, а сумма квадратовъ $= b$.

Рѣшен. Въ разсужденіи вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $xx + yy = b$, II) $xy = a$. Удвоенное второе уравненіе придай къ первому, будетъ $xx + 2xy + yy = b + 2a$, а по извлеченіи изъ каждой части квадратнаго корня выйдетъ $x + y = \pm \sqrt{b + 2a}$; потомъ удвоенное второе уравненіе вычти изъ перваго, будетъ $xx - 2xy + yy = b - 2a$, котораго квадратные корни обѣихъ частей будутъ $x - y = \pm \sqrt{b - 2a}$, сумма сихъ послѣднихъ уравненій будетъ $x + y + x - y$ или $2x = \sqrt{b + 2a} + \sqrt{b - 2a}$, а по раздѣленіи на 2 найдесть $x = \frac{1}{2} \sqrt{b + 2a} + \frac{1}{2} \sqrt{b - 2a}$; разность же помянутыхъ уравненій будетъ $x + y - x + y$, или $2y = \sqrt{b + 2a} - \sqrt{b - 2a}$ или $y = \frac{1}{2} \sqrt{b + 2a} - \frac{1}{2} \sqrt{b - 2a}$. Положимъ $a = 105$, $b = 274$, то найдесть $x = \frac{1}{2} \sqrt{484} + \frac{1}{2} \sqrt{64} = 15$, а $xy = 105$, по сему $y = \frac{105}{x} = \frac{105}{15} = 7$.

Примѣчаніе. Въ первомъ рѣшеніи XII Задачи, для смыканія величины x , слагаемо было уравненіе $x - y = \pm \sqrt{2b - a^2}$ съ уравненіемъ $x + y = a$; напротивъ того, для изобрѣщенія y одно изъ другаго вычтено; сѣ было возможно по той причинѣ, первое, что въ обѣихъ уравненіяхъ знаки величины y суть разные, и припомъ и предстоящіе ихъ одинаки, а во второмъ случаѣ, величину y найши было можно, въ разсужденіи того, что $-x$ уничтожаетъ $+x$; подобное сему и въ XIII Задачѣ произ-

ведено. По сей причинѣ для уничтоженія одной неизвѣстной буквы въ двухъ уравненіяхъ, имѣющихъ двѣ неизвѣстныя величины съ одинаковыми предстоящими, учинишь можно только тогда, когда въ обѣихъ уравненіяхъ оныя двѣ неизвѣстныя буквы будутъ съ разными знаками; но если въ обѣихъ уравненіяхъ одинакія неизвѣстныя величины будутъ съ одинаковыми знаками, то помянутого уничтоженія буквѣ учинишь не можно. Если будутъ два уравненія, *напримѣръ* $ax+by=c$, $dx-by=s$, въ коихъ неизвѣстныя x и y съ разными предстоящими; то для уничтоженія одной буквы, поступать должно такъ: положишь, что должно уничтожить букву y , то умножь всѣ члены втораго уравненія предстоящимъ b буквы y перваго уравненія, а всѣ члены перваго предстоящимъ y буквы y втораго уравненія; отъ чего произойдутъ два уравненія $aux+byu=pc$, и $bdx-byu=bS$; теперь сложи два сіи уравненія, отъ чего выйдетъ уравненіе $aux+bdx=pc+bS$, въ которомъ находишься одна только неизвѣстная буква x . Напротивъ того, ежели бы должно было исключить букву x , то умножь члены втораго уравненія чрезъ a , а члены перваго чрезъ d , вычти второе уравненіе изъ перваго, отъ чего произойдетъ такое уравненіе, въ которомъ будетъ одна только неизвѣстная буква y .

Задача. XIV. Изъ 600 человекъ поставленъ строй, такъ что опнявъ 10 рядовъ, выйдетъ еще 2 шеренги; спраш. число людей въ ряду и шеренгѣ.

Рѣшен. Положимъ $600=a$, число людей въ шеренгѣ x , въ ряду y ; отъ сего произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $xy=a$, II) $(x-10)2=10y$; раздѣли части втораго уравненія на 2, выйдетъ $x-10=5y$ или $x=5y+10$, а изъ перваго уравненія найдется $x=\frac{a}{y}$; потомъ сопоставя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе $5y+10=\frac{a}{y}$, умножь чрезъ y , будетъ $5y^2+10y=a$, а по раздѣленіи на 5 выйдетъ y^2

$y^2 + 2y = \frac{a}{5}$; отсюда найдемся $y = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{5} + 1\right)}$
 $= -1 \pm \sqrt{121} = 10$, и $x = \frac{a}{y} = \frac{600}{10} = 60$.

Задача XV. Найди два числа, коихъ бы произведеніе было $=a$, а разность квадратовъ равна суммѣ чиселъ.

Рѣшен. Положимъ большое число x , меньшее y , то будетъ $xy = a$, гдѣ $x = \frac{a}{y}$, также $x + y = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$; раздѣли обѣ части сего уравненія на $x + y$, выйдетъ $1 = x - y$, поставь въ семъ уравненіи на мѣсто x величину $\frac{a}{y}$, будетъ $1 = \frac{a}{y} - y$, умножь на y , выйдетъ $y = a - y^2$ или $y^2 + y = a$; отсюда найдемся $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)}$. Положимъ $a = 132$, то будетъ $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{132\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{5\frac{9}{4}} = 11$, а $x = \frac{132}{11} = 12$.

Задача XVI. Сыскажь два числа, коихъ произведеніе $=a$, а сумма ихъ равна двойной разности искомымъ чиселъ.

Рѣшен. Положимъ большое количество $=x$, меньшее $=y$, то произойдетъ $xy = a$ и $x + y = (x - y)2 = 2x - 2y$, изъ коихъ въ первомъ будетъ $x = \frac{a}{y}$, а во второмъ найдемся $3y = x$; по сему $3y = \frac{a}{y}$, умножь на y , будетъ $3y^2 = a$, а по раздѣленіи на 3 и по извлеченіи квадратныхъ корней найдемся $y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}a}$. Положимъ, что $a = 108$, тогда будетъ $y = \pm \sqrt{\frac{108}{3}} = \pm \sqrt{36} = \pm 6$, а $x = \frac{108}{6} = 18$.

Задача. XVII. Найти два числа, коихъ сумма $=a$, а сумма ихъ кубовъ $=b$.

Рѣшен. Пусть меньшее искомое x , то большее будетъ $a-x$, коихъ сумма кубовъ будетъ $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 + x^3 = b$ или по сокращеніи и перенесеніи членовъ изъ одной части въ другую, выйдетъ $3ax^2 - 3a^2x = b - a^3$; раздѣли на $3a$, будетъ $x^2 - ax = \frac{b-a^3}{3a}$, откуда найдется $x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{b-a^3}{3a} + \frac{a^2}{4}\right)}$, а большее число $a-x$ будетъ $= \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{b-a^3}{3a} + \frac{a^2}{4}\right)}$.

Задача. XVIII. Найти два числа, коихъ бы разность съ разностию квадратовъ $=a$, а сумма квадратовъ съ суммою чиселъ была $=b$.

Рѣшен. Положимъ большее число x , меньшее y , то по обстоятельствуамъ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x-y+x^2-y^2=a$ II) $x+y+x^2+y^2=b$; сумма сихъ уравненій будетъ $2x^2+2x=a+b$, раздѣли на 2, выйдетъ $x^2+x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, откуда найдется $x=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}\right)}$. Потомъ вычти первое уравненіе изъ втораго, останется $2y^2+2y=b-a$, раздѣли на 2, выйдетъ $y^2+y=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, откуда найдется $y=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)}$. Положимъ $a=14$, $b=26$, то будетъ $x=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4}}=4$, а $y=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}=2$.

Задача. XIX. Требуется два числа, коихъ бы сумма, произведеніе и разность ихъ квадратовъ равны были между собою.

Рѣшен. Положимъ большое число x , меньшее y , то по обстоятельствусправмъ вопроса будетъ $x+y=x^2-y^2=(x+y)\times(x-y)$; раздѣли каждую часть сего уравненія на $x+y$, будетъ $1=x-y$, гдѣ $x=1+y$, по сему $x+y=2y+1=x^2-y^2$; равнымъ образомъ и произведение $xy=2y+1=(1+y)y=y^2+y$, по сему $y^2+y=2y+1$, а перенеся члены изъ одной части въ другую будетъ $y^2-y=1$, откуда найдется $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{1\frac{1}{4}}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. а $x=1+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Или: положимъ полсуммы искомыхъ чиселъ x , а половина ихъ разности y , то большое число будетъ $x+y$, а меньшее $x-y$ (123. Зад. IX.); сумма ихъ будетъ $=2x$, произведение $(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$, а разность ихъ квадратовъ $4xy$. И такъ въ разсужденіи вопроса будетъ $2x=4xy$, раздѣли на $2x$, выйдетъ $1=2y$, гдѣ $y=\frac{1}{2}$; но $x^2-y^2=2x$, по сему $x^2-2x=y^2=\frac{1}{4}$, откуда найдется $x=1\pm\sqrt{1\frac{1}{4}}=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$, слѣдовательно большое число $x+y=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; а меньшее $x-y=-\frac{1}{2}+1\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ тоже, что и прежде.

Задача. XX. Найди два числа, коихъ бы сумма, произведение и сумма квадратовъ были равны между собою.

Рѣшен. Положимъ полсуммы искомыхъ чиселъ x , а половина ихъ разности y , то большое число будетъ $x+y$, а меньшее $x-y$, коихъ сумма $=2x$, произведение $(x+y)\times(x-y)=x^2-y^2$, а сумма ихъ квадратовъ $=2x^2+2y^2$.

И такъ въ разсужденіи вопроса будетъ $2x = x^2 - y^2$, или $y^2 = x^2 - 2x$, также и $2x = 2x^2 + 2y^2$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $x = x^2 + y^2$, или $x - x^2 = y^2$; по сему для равенства количествъ будетъ $x^2 - 2x = x - x^2$, раздѣли на x выйдетъ $1 - 2 = 1 - x$, а перенеся величины изъ одной части въ другую будетъ $2x = 3$, раздѣли на 2, найдемъ $x = \frac{3}{2}$; по сему $y^2 = x^2 - 2x = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$, а по извлеченіи квадратнаго корня найдемъ $y = \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; слѣдовательно большое число $x + y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$, а меньшее $x - y = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$, суть числа мнимыя.

Задача XXI. Найди два числа, коихъ сумма съ произведеніемъ $= a$, а сумма квадратовъ безъ суммы искомыхъ чиселъ $= b$.

Рѣшен. Положимъ искомыя числа x и y , то въ разсужденіи вопроса будетъ I) $x + y + xy = a$, II) $x^2 + y^2 - (x + y) = b$. Пусть будетъ $x + y = z$; и такъ поспавя въ обѣихъ уравненіяхъ z вмѣсто $x + y$, будетъ $xy + z = a$, или $xy = a - z$, также $x^2 + y^2 - z = b$, или $x^2 + y^2 = b + z$; къ сему уравненію придай удвоенное предвѣдущее уравненіе, то есть $2xy = 2a - 2z$, сумма будетъ $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 2a + b - z = z^2$, а перенеся величины изъ одной части въ другую выйдетъ $z^2 + z = 2a + b$, откуда найдемъ $z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2a + b + \frac{1}{4}}$. Но какъ $x + y = z$, то будетъ $x = z - y$, также $xy = a - z$, гдѣ $x = \frac{a - z}{y}$;

по-

попомѣ составя изъ сихъ двухъ послѣднихъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{a-z}{y} = z - y$, умножь чрезъ y , будетъ $a - z = zy - y^2$, или $y^2 - zy = z - a$, откуда найдется $y = \frac{z \pm \sqrt{(z-a) + \frac{zz}{4}}}{2}$; а по симъ извѣстнымъ количествамъ найдется $x = z - y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(2a + b + \frac{1}{4}) - \frac{z}{2} - \sqrt{(z-a + \frac{1}{4}z^2)}}$. Положимъ $a = 34$, $b = 42$, чрезъ что найдется $z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{110\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm 10\frac{1}{2} = 10$, а $y = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{z-a + \frac{1}{4}z^2} = 5 \pm \sqrt{1} = 5 \pm 1 = 6$, и $x = z - y = 10 - 6 = 4$.

или :

Положимъ полсуммы искомымъ чиселъ $= x$, и половина разности ихъ $= y$, то большее количество будетъ $x + y$, а меньшее $= x - y$, сумма ихъ $= 2x$, произведеніе $(x + y) \times (x - y) = x^2 - y^2$, а сумма квадратовъ $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$; и такъ по обстоятельству вѣдѣнаго вопроса будетъ 1) $x^2 - y^2 + 2x = a$, 11) $2x^2 + 2y^2 - 2x = b$; сложи удвоенное первое уравненіе со вторымъ, сумма будетъ $4x^2 + 2x = 2a + b$, раздѣли на 4, выйдетъ $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{2a + b}{4}$, откуда найдется $x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{2a + b}{4} + \frac{1}{16})}$. Положимъ для краткости сіе извѣстное количество $= n$ и употребимъ оное вмѣсто x , то въ уравненіи $x^2 - y^2 + 2x = a$, будетъ $x^2 + 2x - a = y^2 = n^2 + 2n - a$, а по извлеченіи квадратныхъ корней будетъ $y = \sqrt{(n^2 + 2n - a)}$. И такъ взявъ вмѣсто буквъ извѣстныя количества най-

найдется $x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{68 \pm 42}{4} + \frac{1}{16}\right)} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{441}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{21}{4} = 5$, а $y = \pm \sqrt{(n^2 + 2n - a)} = \pm \sqrt{(35 - 34)} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$; по сему большее число $5 + 1 = 6$, а меньшее $5 - 1 = 4$.

Задача XXII. Найти два числа, коихъ произведение равно суммѣ чиселъ, а сумма ихъ квадратовъ съ суммою чиселъ $= 12$.

Рѣшен. Пусть $12 = a$, искомыя числа x и y , по вѣ разсужденіи вопроса будетъ 1) $x + y = xy$, 11) $x + y + x^2 + y^2 = a$; возвысь каждую часть перваго уравненія во вторую степень, будетъ $x^2 + y^2 + 2xy = x^2y^2$ или $x^2 + y^2 = x^2y^2 - 2xy$; поставь во второмъ уравненіи xy вмѣсто $x + y$, а $x^2y^2 - 2xy$ вмѣсто $x^2 + y^2$, отъ чего произойдетъ $xy + x^2y^2 - 2xy = a$, или $x^2y^2 - xy = a$; придай къ обѣмъ частямъ сего уравненія квадратъ изъ половины предстоящаго величины xy , то есть $\frac{1}{4}$, выйдетъ $x^2y^2 - xy + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$, а по извлеченіи квадратныхъ корней найдется $xy = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = +\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$. И такъ написавъ $xy = 4$, найдется $x = \frac{4}{y}$, а изъ перваго уравненія $x + y = xy = 4$, същется $x = 4 - y$; теперь составя изъ сихъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{4}{y} = 4 - y$, умножь чрезъ y , выйдетъ $4 = 4y - y^2$ или $y^2 - 4y = -4$, откуда найдется $y = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2 \pm \sqrt{0} = 2$ по сему $x = \frac{4}{y} = \frac{4}{2} = 2 = y$.

или

Положимъ полсуммы искомыхъ чиселъ $= x$, а половина разности $= y$, то большее количество

бу-

будетъ $x + y$, а меньшее $x - y$, сумма ихъ $= 2x$, произведение $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, а сумма квадратовъ $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$; отъ сего произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $x^2 - y^2 = 2x$, 11) $2x^2 + 2y^2 + 2x = a$ или $2x^2 + 2y^2 = a - 2x$; сложи сие уравненіе съ удвоеннымъ первымъ уравненіемъ, будетъ $4x^2 = a + 2x$, или $4x^2 - 2x = a$, раздѣли на 4, выйдетъ $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{a}{4}$, откуда найдется $x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{a}{4} + \frac{1}{16})} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{3\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} = 2$; потомъ изъ уравненія $x^2 - y^2 = 2x$ выйдетъ $x^2 - 2x = y^2$, въ коемъ поставь 2 вмѣсто x , будетъ $y^2 = 4 - 4 = 0$, по сему $\sqrt{y^2} = y = 0$; слѣдовательно большее число $x + y = 2 + 0 = 2$, а меньшее $x - y = 2 - 0 = 2$.

Задача XXIII. Найти два числа x и y , коихъ произведение безъ квадрата второй величины $= a$, а произведение квадрата изъ первой на вторую безъ куба второй величины $= b$.

Рѣшен. По обстоятельствамъ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $xy - y^2 = a$, II) $yx^2 - y^3 = b$; или I) $(x - y)y = a$, II) $(x^2 - y^2)y = b$, раздѣли сие уравненіе на первое, частное будетъ $x + y = \frac{b}{a}$, откуда найдется $x = \frac{b}{a} - y$; поставь сие количество въ первомъ уравненіи вмѣсто x , будетъ $(x - y)y = (\frac{b}{a} - y - y)y = (\frac{b}{a} - 2y)y = \frac{by}{a} - 2y^2 = a$, или $by - 2ay^2 = a^2$, въ которомъ перемѣня знаки въ противные, будетъ $2ay^2 - by = -a^2$, раздѣли на $2a$, выйдетъ $y^2 - \frac{by}{2a} = -\frac{a^2}{2a}$, откуда найдется $y = \frac{b}{4a} \pm \sqrt{(\frac{b^2}{16} - \frac{a^2}{2})}$; также и $x = \frac{b}{a} - y = \frac{3b}{4a} - \sqrt{(\frac{b^2}{16} - \frac{a^2}{2})}$.

Зада.

Задача XXIV. Сыскашь при числа x , y и z , изъ коихъ сумма двухъ первыхъ $=b$, произведение первого на второе равно произведению третьяго чрезъ a , и сумма квадратовъ изъ двухъ первыхъ равна квадрату третьяго.

Рѣшен. Въ разсуденіи вопроса произойдутъ при слѣдующія уравненія: I) $x+y=b$, II) $xy=az$, III) $x^2+y^2=z^2$; умножь части первого уравненія квадратно, будетъ $x^2+y^2+2xy=b^2$, въ которомъ $x^2+y^2=b^2-2xy$, а поставя въ семъ уравненіи az вмѣсто xy , будетъ $x^2+y^2=b^2-2az$; по сему вторая часть сего уравненія равна второй части третьяго уравненія, то есть $z^2=b^2-2az$ или $z^2+2az=b^2$, въ которомъ найдется $z=-a\pm\sqrt{(b^2+a^2)}$. Но какъ въ первомъ уравненіи $y=b-x$, а во второмъ $y=\frac{az}{x}$; по сей причинѣ будетъ $\frac{az}{x}=b-x$, умножь на x , выйдетъ $az=bx-x^2$, а перемѣня знаки въ противные, будетъ $x^2-bx=-az$, въ которомъ (положа для краткости известную величину $z=n$) найдется $x=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(\frac{b^2}{4}-an)}$, а $y=\frac{1}{2}b-\sqrt{(\frac{b^2}{4}-an)}$.

Задача XXV. Найди при числа x , y и z , коихъ сумма $=a$, произведение двухъ первыхъ $=b$, а сумма квадратовъ двухъ первыхъ величинъ равна квадрату изъ третьяго.

Рѣшен. По свойству вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x+y+z=a$, II) $xy=b$, III) $x^2+y^2=z^2$. Изъ первого уравненія произойдетъ $x+y=a-z$ (A), а по возвышеніи каждой

части

части во вторую степень будетъ $x^2 + y^2 + 2xy = a^2 - 2az + z^2$; но какъ $x^2 + y^2 = z^2$; того ради отнявъ сіи равныя количества отъ обѣихъ частей предвѣдущаго уравненія, будетъ $2xy = a^2 - 2az = 2b$, или $2az = a^2 - 2b$, а по раздѣленіи на $2a$ будетъ $z = \frac{aa - 2b}{2a}$. Изъ втораго уравненія найдемся $y = \frac{b}{x}$; поставивъ сіе количество въ уравненіи (А) вмѣсто y , будетъ $x + \frac{b}{x} = a - z = a - \left(\frac{aa - 2b}{2a}\right) = \frac{aa + 2b}{2a}$; умножь первую и послѣднюю части сего уравненія чрезъ x , будетъ $x^2 + b = \left(\frac{aa + 2b}{2a}\right)x$, или $x^2 - \left(\frac{aa + 2b}{2a}\right)x = -b$, откуда найдемся $x = \frac{aa + 2b}{4a} \pm \sqrt{\left(\frac{aa + 2b}{4a}\right)^2 - b}$, и $y = \frac{aa + 2b}{4a} - \sqrt{\left(\frac{aa + 2b}{4a}\right)^2 - b}$.

Задача. XXVI. Найти два числа x и y , коихъ разность $= b$, а квадратной корень изъ произведенія ихъ $= a$.

Рѣшен. По силѣ вопроса будетъ I) $x - y = b$, II) $\sqrt{xy} = a$; изъ перваго уравненія выйдемъ $x = b + y$, а когда части втораго уравненія возвышены будутъ во вторую степень, то выйдетъ $xy = a^2$, гдѣ $x = \frac{aa}{y}$; по сей причинѣ $b + y = \frac{aa}{y}$, умножь чрезъ y , будетъ $y^2 + by = a^2$, откуда найдемся $y = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$, а $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$.

О рѣшеніи чистыхъ уравненій всѣхъ степеней.

§ 130. Ежели представимъ себѣ уравненіе неопредѣленной степени, на примѣръ. $ax^m = bd$; то въ немъ можно заключить всѣ степени уравненія. въ коемъ неизвѣстную величину найти не трудно: ибо раздѣля каждую часть уравненія на a , будетъ $x^m = \frac{bd}{a}$ или положа $\frac{bd}{a} = c$, будетъ $x^m = c$; потомъ когда извлечется изъ каждой части уравненія корень степени m , то найдется $x = \sqrt[m]{c}$. И такъ ежели m будетъ представлять чопное число, то корень сей степени будетъ имѣть предъ собою два знака \pm , то есть $+$ или $-$, на примѣръ: ежели $m = 4$, то будетъ $x = \pm \sqrt[4]{c}$, и ежели положимъ что $c = 16$, то найдется $x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$; изъ сего явствуетъ, что всѣ чепыре корня могутъ быть или положительныя, либо всѣ отрицательныя, или два положительныхъ и два отрицательныхъ. Положимъ что $c = -8$, то будетъ $x = \pm \sqrt[4]{-8}$, котораго всѣ корни суть количества невозможныя (§ 87); но еспли $m = 3$, тогда найдется $x = \sqrt[3]{-8} = -2$; и кромѣ сего корня будутъ еще два другіе или положительные, или мнимые. Тожъ должно разумѣть о корняхъ прочихъ степеней.

При-

Примѣры.

Задача I. Отецъ подарилъ дочери кошелекъ денегъ, коихъ квадратное число ежели умножишь одною четвертью всѣхъ денегъ, то произведение будетъ 432; спрашивается число денегъ.

Рѣшен. Пусть будетъ число денегъ въ кошелькѣ x рублей, то по обстоятельству вопроса будетъ $x^2 \times \frac{1}{4}x = 432$, или $\frac{x^3}{4} = 432$; умножь чрезъ 4, будетъ $x^3 = 1728$, а по извлеченіи кубическаго корня найдется $\sqrt[3]{x^3} = x = 12 =$ искомому числу рублей.

Задача II. Требуется такое число x , котораго ежели четвертая степень раздѣлится на половину искомаго числа, и къ частному придастся $14\frac{1}{4}$, то сумма будетъ 100.

Рѣшен. Раздѣли x^4 на $\frac{x}{2}$, частное будетъ $2x^3$, и такъ въ разсужденіи вопроса выйдетъ слѣдующее уравненіе: $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, въ которомъ $2x^3 = 100 - 14\frac{1}{4} = \frac{343}{4}$, а по раздѣленіи на 2 будетъ $x^3 = \frac{343}{8}$, откуда найдется $x = \sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

§ 131. **Прибавлен.** Когда въ уравненіи неизвѣстная величина будетъ четвертой и второй только степени, то она найдется посредствомъ уравненія второй степени, на примѣръ: $x^4 + 2x^2 = 80$; ибо придавъ къ обѣимъ частямъ квадратъ изъ половины предстоящаго величины x^2 , будетъ $x^4 + 2x^2 + 1 = 80 + 1 = 81$, попомъ извлеки изъ обѣихъ частей квадратные

М

корни

корни выйдеть $x^2 + 1 = \pm \sqrt{81}$, или $x^2 = -1 \pm \sqrt{81} = -1 \pm 9 = 8$; наконецъ извлеки еще квадратные корни, найдется $x = \pm \sqrt{8}$. Ежели уравненіе будетъ $x^4 + 2x^2 = 10$, то найдется $x^2 = -1 \pm \sqrt{11}$, а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратныхъ корней будетъ $x = \pm \sqrt{-1 \pm \sqrt{11}}$.

Задача III. Въ уравненіи $\frac{ax^4}{b} - \frac{cx^2}{d} = e$ найти неизвѣстную величину буквы x .

Рѣшен. Умножь каждую часть чрезъ b и d , будетъ $adx^4 - bcx^2 = bde$, потомъ раздѣли на предстоящее величины x^4 , то есть на ad , выйдеть $x^4 - \frac{bcxx}{ad} = \frac{bde}{ad} = \frac{be}{a}$, откуда найдется $x^2 = \frac{be}{2ad} \pm \sqrt{\left(\frac{be}{a}\right)^2 + \frac{bbcc}{4aadd}}$; а наконецъ извлеки изъ обѣихъ частей квадратные корни, найдется $x = \pm \sqrt{\frac{be}{2ad}} \pm \sqrt{\left(\frac{be}{a}\right)^2 + \frac{bbcc}{4aadd}}$



О содержаніяхъ, пропорціяхъ и прогрессіяхъ.

§ 132. **Опредѣл.** Содержаніе есть такое одно-го количества съ другимъ однороднымъ сношеніе, чрезъ которое познается, какимъ образомъ одно изъ другаго происходитъ.

Ежели разсуждается о разности двухъ количествъ, на примѣръ 6 и 2 хъ, тогда такое сношеніе двухъ чиселъ называется *содержаніемъ Арифметическимъ*; но ежели разсматривается
сколь-

сколько разъ въ первомъ b , содержится въ второе a , такое содержаніе называется *Геометрическимъ*. Первое или сперва написанное изъ двухъ сносимыхъ количествъ именуется *предъидущій*, а второе *послѣдующій* членъ содержанія. Содержаніе Арифметическое познается чрезъ вычитаніе одного количества изъ другаго, и для того изображается приспойнѣ знакомъ вычитанія, нежели (какъ то нѣкоторые означаютъ) почкою; на примѣръ $b - a = d$, или и вообще $a - b = d$, число d или буква d , означающее, чѣмъ одно число больше другаго, именуется *разность* содержанія.

Содержаніе Геометрическое познается чрезъ дѣленіе предъидущаго на послѣдующій, или послѣдующаго на предъидущій, какъ на примѣръ: содержаніе b къ a мѣ будетъ $\frac{b}{a} = 3$. Число 3 , показывающее, сколько разъ одно изъ сносимыхъ количествъ содержится въ другомъ, называется *знаменатель* или *показатель* содержанія. Изъ сего видно, что всякая дробь есть Геометрическое содержаніе, котораго предъидущій членъ есть числитель, а послѣдующій знаменатель, и для того содержаніе b къ a или вообще a къ b можетъ быть изображено чрезъ $\frac{a}{b}$ или знакомъ дѣленія $a : b$

Члены содержанія могутъ быть или равны, или не равны между собою.

§ 133. *Опредѣлен.* Когда члены содержанія равны, тогда такое сношеніе чиселъ именуется *содержаніе равенства*. Содержаніемъ *большаго неравенства* зовется то, въ которомъ предъидущій членъ больше послѣдующаго; а содержаніе

меньшаго неравенства есть то, въ которомъ первый членъ меньше второго.

§ 134. *Опредѣлен.* Равенство двухъ содержаній зовется *пропорціею* или *соразмѣрностію*, на примѣръ: два равныя содержанія Арифметическія $7-3$ и $6-2$, или когда $a-b=e$ и $c-d=e$, тогда два такія содержанія составляютъ *пропорцію Арифметическую*; которая означается такъ: $7-3=6-2$ и вообще $a-b=c-d$, и словами выговаривается чѣмъ a меньше b , тѣмъ c меньше d . Два равныя Геометрическія содержанія $12:6$ и $4:2$, или ежели $a:b=n$, и $c:d=n$ то они составляютъ *Геометрическую пропорцію*, которая пишется такимъ образомъ $12:6=4:2$ или $\frac{12}{6}=\frac{4}{2}$, и вообще $a:b=c:d$, и выговаривается a содержится къ b , какъ c къ d .

§ 135. *Опредѣлен.* Первой и послѣдній членъ въ Арифметической и Геометрической пропорціяхъ именуются *крайними*, а второй и третій средними членами.

§ 136. *Опредѣлен.* Ежели въ пропорціи Арифметической, на примѣръ $12-9=9-6$ либо $a-b=b-c$, или въ Геометрической, на примѣръ $12:6=6:3$ или $a:b=b:c$ средніе члены одинаки, тогда каждая изъ нихъ именуется *непрерывною*; а тотъ членъ, которой два раза принимается въ отношеніе, какъ-то 9 и 6 , называется *средній пропорціональній*.

Для краткости непрерывная Арифметическая пропорція означается такъ: $\div 12, 9, 6$ и вообще $\div a, b, c$; а Геометрическая пишется слѣ-

слѣдующимъ образомъ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $12 : 6 : 3$ и вообще $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

§ 137. *Слѣдств.* Изъ предъидущихъ предложеній видно, еслили положимъ, что разность содержанія Арифметическаго a къ b будетъ $= d$, то оное содержаніе Арифметическое $a-b$ вообще изобразится можетъ такимъ образомъ: $a - a \pm d$: съ знакомъ $+$ изобразится тогда, когда предъидущій членъ a будетъ меньше послѣдующаго, а съ знакомъ $-$, когда предъидущій будетъ больше послѣдующаго; ибо въ содержаніи Арифметическомъ 6 къ 4 послѣдующій членъ 4 равенъ предъидущему 6 безъ разности 2 , и обратно въ содержаніи 4 къ 6 послѣдующій членъ 6 равенъ предъидущему 4 , сложенному съ разностію 2 .

§ 138. *Теорема.* Въ пропорціи Арифметической сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ членовъ.

Доказательство. Пусть будетъ пропорція $a-b=c-e$, у которой разность содержаній $= d$, то на мѣсто втораго b поставь $a \pm d$, а вмѣсто четвертаго e напиши $c \pm d$; потомъ данную пропорцію изобрази слѣдующимъ образомъ: $a, a \pm d = c, c \pm d$, у которой сумма крайнихъ $a + c \pm d$ равна суммѣ среднихъ $c + a \pm d$; слѣдовательно сумма $a + e = b + c$. Еще легче можно доказать истинну сего предложенія, ежели только представишь себѣ, что a безъ b равно c безъ e , то есть $a-b=c-e$, то придавъ къ каждой части сего уравненія количество b , будетъ $a=b+c-e$, потомъ придай e , будетъ $a+e=b+c$, то есть сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ членовъ.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, что въ непрерывной Арифметической пропорціи, на примѣръ, $\div a - b - c$, сумма крайнихъ членовъ равна среднему дважды взятому; поелику помянутая пропорція напишется такимъ образомъ: $a - b = b - c$, но по предъидущему предложению будетъ $a + c = b + b = 2b$; слѣдовательно сумма крайнихъ вдвое больше средняго.

§ 139. **Задача.** Къ тремъ даннымъ членамъ a , b и c Арифметической пропорціи найди четвертой.

Рѣшен. Положимъ искомой членъ x , то пропорція будетъ слѣдующая: $a - b = c - x$, у которой $a + x = b + c$ (§ 138); вычти изъ каждой части количество a , останется $x = b + c - a$, то есть, сумма втораго съ третьимъ безъ перваго члена, равна четвертому Арифметическому члену.

Слѣдств. I. Подобнымъ сему порядкомъ найдется всякой членъ Арифметической пропорціи, на примѣръ: ежели потребно будетъ найти второй членъ, то пропорція изобразится такъ: $a - x = b - c$, гдѣ $b + x = a + c$, вычти изъ каждой части b , останется $x = a + c - b$, то есть, сумма перваго съ послѣднимъ безъ третьяго равна второму. Еслижъ потребенъ будетъ въ пропорціи Арифметической первой членъ, то представя себѣ пропорцію $x - a = b - c$, будетъ $x + c = a + b$, откуда найдется $x = a + b - c$, то есть сумма втораго съ третьимъ безъ послѣдняго равна первому члену.

Слѣдств. II. Изъ сего видно, что средній пропорціональный членъ непрерывной Арифметической про-

пропорціи между a и b равенъ будетъ полсуммѣ крайнихъ a и b ; ибо положимъ требуемой членъ $=x$, то будетъ $\div a-x-b$, гдѣ $a+b=2x$ (§ 138. Слѣдств.), а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $x=\frac{a+b}{2}$. Еслилижъ потребенъ будетъ третій членъ, то пропорція будетъ $\div a-b-x$, у которой $a+x=2b$, вычти изъ обѣихъ частей уравненія количество a , найдется $x=2b-a$, то есть, третій членъ непрерывной Арифметической пропорціи равенъ дважды взятому среднему члену безъ перваго; и обратно первой членъ сыщется, когда изъ средняго, дважды взятаго, вычтется третій членъ.

О прогрессіи Арифметической.

§ 140. Опредѣл. Если непрерывная Арифметическая пропорція будетъ имѣть больше трехъ членовъ, такъ чпо послѣдующій членъ каждаго содержанія будетъ равенъ предъидущему послѣдующаго содержанія, такой рядъ чиселъ именуется прогрессіею Арифметическою, какъ на примѣръ, $\div 3-5=5-7=7-9=9-11$ и проч. или $\div a-b=b-c=c-d=d-e$ и проч. Арифметическая прогрессія для сокращенія выражается такимъ образомъ: $\div 3, 5, 7, 9, 11$ и проч. и вообще $\div a, b, c, d, e$ и проч.

§ 141. Опредѣл. Прогрессія возрастающая именуется та, у которой члены одинъ послѣ другаго увеличиваются, какъ на примѣръ: $\div 3, 5, 7, 9, 11$ и проч.; напротивъ того прогрессія убывающая есть та, у которой члены одинъ

послѣ другаго уменьшающагося, какъ на примѣрѣ:
 $\div 13, 10, 7, 4, 1$.

Слѣдств. Изъ сего видно, что прогрессія Арифметическая есть рядъ чиселъ, у которыхъ между каждыми двумя сряду стоящими членами разность одинакая.

Примѣчан. Прогрессія Арифметическая можетъ начинаться и отъ нуля, какъ-то $\div 0, 2, 4, 6, 8$, и проч.

§ 142. Задача. Извѣстна разность d , и первой членъ a , составить прогрессию до нѣсколькихъ членовъ.

Рѣшен. Поскольку въ Арифметической прогрессіи каждыхъ двухъ сряду стоящихъ членовъ разность одинакая, того ради въ возрастающей прогрессіи каждой послѣдующій членъ равенъ предъидущему сложенному съ разностію; а въ убывающей каждой послѣдующій членъ равенъ предъидущему безъ разности; слѣдственно вообще такія прогрессіи изобразятся слѣдующимъ образомъ $\div a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, a \pm 4d, a \pm 5d$ и проч. то есть, ежели положимъ $a=1, d=2$, то прогрессія возрастающая будетъ $\div 1, 3, 5, 7, 9$ и проч. естлижъ будетъ $a=15, d=2$, то убывающая прогрессія будетъ слѣдующая $\div 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1$

Слѣдств. Изъ сего видно, что въ возрастающей Арифметической прогрессіи каждый членъ равенъ первому члену, сложенному съ произведеніемъ изъ разности прогрессіи на число предъидущихъ членовъ, какъ на примѣрѣ: шестой членъ предложенной прогрессіи $= a + d \times 5$ или $a + 5d$; по сей причинѣ ежели положимъ число членовъ n , то будетъ послѣдній членъ Арифметической прогрессіи $x = a$

$+(n-1)d$. И такъ еслии будетъ первой членъ $a=1$, разность $d=3$, число членовъ $n=7$, то будетъ седьмой членъ $x=1+(7-1).3=1+18=19$.

§ 143. Теорема. Въ прогрессіи Арифметической, сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ двухъ другихъ, въ равномъ разстояніи отъ нихъ находящихся.

Доказательство. Пусть будетъ прогрессія $\div a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d$. Поелику разность между первымъ и другимъ какимъ нибудь членомъ, также между послѣднимъ крайнимъ и другимъ, отъ него въ такомъ же разстояніи находящимся, пребудетъ всегда одинака; то въ разсужденіи сего два первые члена и два послѣдніе, находящіеся въ одинакомъ разстояніи, составляютъ Арифметическую пропорцію, то есть $a-(a+d)=a+5d-(a+6d)$, у коюрой сумма крайнихъ членовъ $2a+6d$ равна суммѣ среднихъ $2a+6d$. Равнымъ образомъ сумма третьяго и пятого членовъ, будетъ также $a+2d+a+4d=2a+6d$.

Слѣдст. Изъ сего видно, что какой нибудь средній членъ Арифметической прогрессіи равенъ половинѣ суммы двухъ другихъ, въ равномъ разстояніи отъ него находящихся, на примѣръ: 4 й членъ равенъ половинѣ суммы втораго и шестаго члена, то есть $a+3d = \frac{a+d+a+5d}{2} = \frac{2a+6d}{2}$.

§ 144. Теорема. Въ прогрессіи Арифметической сумма всѣхъ членовъ равна произведенію

М 5

изъ

то будетъ сумма прогрессіи $S = \frac{2n + (n-1)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$. Когда такая прогрессія будетъ начинаться

отъ 0, какъ-то 0, 1, 2, 3, 4 и прочая, то будетъ послѣдній членъ $x = 0 + (n-1) \times 1 = n-1$;

поэтому сумма прогрессіи $S = (0 + n-1) \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$.

Положимъ что $a = 1$, а разность $d = 2$, тогда послѣдній членъ $a + (n-1)d$ будетъ $= 1 + (n-1)2$

$= 2n - 1$, а сумма прогрессіи $S = \frac{2an + (n-1)dn}{2}$

$= \frac{2n + (n-1)2n}{2} = nn$, то есть сумма прогрессіи

нечетныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7, 9 и проч. равна квадрату изъ числа членовъ.

Задача I. Извѣстны послѣдній членъ, число членовъ и разность, найди первой членъ и сумму Арифметической прогрессіи.

Рѣшен. Положимъ первой членъ $= x$, послѣдній $= c$, число членовъ $= n$, разность $= d$, то будетъ $c = x + (n-1)d$ (§ 142. Слѣд.), откуда найдемъ $x = c - (n-1)d = c - nd + d$; потомъ умножь сумму перваго съ послѣднимъ чрезъ половину числа членовъ, выйдетъ сумма прогрессіи $S = (2c - nd + d) \frac{n}{2}$.

Задача II. Извѣстенъ первой и послѣдній члены и число членовъ, найди разность прогрессіи.

Рѣшен. Положимъ, первой членъ $= a$, послѣдній $= b$, число членовъ $= n$, а разность $= x$, то будетъ $b = a + (n-1)x$, или $b - a = (n-1)x$, раздѣли каждую часть на $n - 1$, найдемъ $x = \frac{b-a}{n-1}$.

Задача III. Число 40 раздѣлить на 5 частей такъ, чтобы каждая послѣдующая часть превышала свою предъидущую 3 мя.

Рѣшен. Поелику въ семъ вопросѣ 40 есть сумма прогрессіи, 5 число членовъ, 3 разность. И такъ положимъ, первой членъ x , то послѣдній будетъ $=x+(5-1) \cdot 3=x+12$, а сумма прогрессіи $40=(2x+12) \cdot \frac{5}{2}=5x+30$, гдѣ $40-30=5x$ или $10=5x$; раздѣли на 5, найдемся $x=2$ — первой части, и такъ искомыя части будутъ слѣдующія 2, 5, 8, 11, 14, коихъ сумма $=40$.

Задача IV. Извѣстна сумма прогрессіи, число членовъ и послѣдній членъ, сыскать разность.

Рѣшен. Положимъ сумма прогрессіи S , число членовъ n , послѣдній членъ b , первой членъ x , разность y , отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $b=x+(n-1)y$ (§ 142), II) $(b+x) \cdot \frac{n}{2}=S=\frac{nb+nx}{2}$ (§ 144); умножь обѣ части сего уравненія чрезъ 2, будетъ $2S=nb+nx$, откуда найдемся $x=\frac{2S-nb}{n}$; поставь сію величину въ первомъ уравненіи вмѣсто x , будетъ $b=\frac{2S-nb}{n}+(n-1)y$, а по переспавкѣ членовъ выйдетъ $b-(\frac{2S-nb}{n})$ или $\frac{nb-2S+nb}{n}=(n-1)y$ $=\frac{2nb-2S}{n}$, откуда найдемся $y=\frac{2nb-2S}{n(n-1)}$.

Задача V. Между двухъ данныхъ членовъ a и b вставишь число среднихъ n .

Рѣше-

Рѣшен. Когда положимъ разность x , то число членовъ будетъ $n+2$, а послѣдній членъ $b=a+(n+1)x$ или $b-a=(n+1)x$, отсюда найдемся $x=\frac{b-a}{n+1}$. И такъ придай сію разность къ первому члену a , получишь второй членъ, то есть первой средній; а когда къ сему члену придастся помянутая разность, то найдемся третій членъ и такъ далѣе (§ 142), отъ чего произойдетъ слѣдующая прогрессія:
 $\div a, a+(\frac{b-a}{n+1}), a+2(\frac{b-a}{n+1}), a+3(\frac{b-a}{n+1})+\dots b$.
 Положимъ, что $a=3$, $b=15$, $n=3$, то будетъ разность $x=\frac{b-a}{n+1}=\frac{12}{4}=3$, чрезъ что составится прогрессія $\div 3, 6, 9, 12, 15$.

Задача VI. Нѣкто покупаетъ коня, платитъ по условію за первой подковной гвоздь 5 коп. за другой 8 коп. и такъ далѣе за каждой 3 мя копѣйками больше; гвоздей же всѣхъ было 32; найди цѣну коня.

Рѣшен. Здѣсь въ разсужденіи вопроса первой членъ есть $5=a$, разность $3=b$, число членовъ $32=c$, а сумма прогрессіи есть цѣна коня $=x$; по сему послѣдній членъ будетъ $=a+(c-1).b=a+bc-b$, а сумма прогрессіи или цѣна коня $x=(a+a+bc-b)\times\frac{1}{2}c=(2a+bc-b)\times\frac{1}{2}c=103\times 16=1648$ или 16 рубл. 48 коп.

Задача VII. Сыскажь число, состоящее изъ трехъ знаковъ, составляющихъ Арифметическую прогрессію; которое ежели раздѣлился на сумму знаковъ, то выйдетъ 48, а когда изъ оного вычтется 198, то разность будетъ такое чи-

сло, которое произойдетъ отъ переставки знаковъ съ правой руки на лѣво, а съ лѣвой на право.

Рѣшен. Положимъ, что первой знакъ съ лѣвой руки, то есть сотни, содержишь въ себѣ x единицъ, разность помянутыхъ знаковъ y единицъ, то второй членъ будетъ $x+y$, а третей $x+2y$. Но какъ первой членъ есть сотни, второй десятки, того ради будетъ первой членъ $=100x$, второй $=10x+10y$; по сему сумма всѣхъ прехъ членовъ $=100x+10x+10y+1x+2y=111x+12y$; а когда поставиши на мѣстѣхъ перваго третій, а на мѣстѣхъ третьяго первый, то будетъ первый членъ содержишь въ себѣ единицъ $100x+200y$, второй $10x+10y$, а третій x , коихъ сумма $=111x+210y$; сумажъ прехъ знаковъ $=3x+3y$. И такъ произойдутъ слѣдующія уравненія

$$I. \frac{111x+12y}{3x+3y} = \frac{37x+4y}{x+y} = 48, \text{ или } 37x+4y=48x+48y$$

(по умноженіи на $x+y$), II) $111x+12y-198=111x+210y$, въ коемъ по переставкѣ членовъ будетъ $111x-111x-198=210y-12y$, или $-198=198y$, а раздѣля обѣ части на 198, найдетъся $y=-\frac{198}{198}=-1$; въ первомъ же уравненіи $37x+4y=48x+48y$, по переставкѣ величинъ будетъ $-44y=11x$, а по раздѣленіи на 11, выйдетъ $-4y=x$, въ коемъ поставя -1 на мѣсто y найдетъся $x=-4x-1=4$ —первому знаку пребуемаго числа, по сему второй знакъ $x+y=4-1=3$, третей $x+2y=4-2=2$, слѣдовательно искомое число $=432$; которое ежели раздѣлиши на сумму знаковъ 9, то частное $\frac{432}{9}=48$, также $432-198=234$. За-

Задача VIII. Нѣкто, будучи въ пути, заплашилъ за первую версту 3 коп. за другую 5 коп. за третью 7 коп. и такъ далѣе за каждую версту 2 мя копѣйками больше; а наконецъ нашлось, что всѣхъ денегъ во время проѣзда издержено 10 рубл. 88 коп. спрашивается число верстѣ.

Рѣшен. Въ семъ вопросѣ будетъ первой членъ $3=a$, разность прогрессіи $2=n$, и сумма прогрессіи $1088=S$. И такъ положа число членовъ x , будетъ послѣдній членъ $=a+(x-1)n = a+nx-n$, по сему сумма прогрессіи $S = (2a+nx-n) \cdot \frac{x}{2} = \frac{nx^2+2ax-nx}{2}$ (§ 144), а по умноженіи на 2 выйдетъ $nx^2+2ax-nx=2S$; раздѣли на n , будетъ $x^2+(\frac{2a-n}{n}) \cdot x = \frac{2S}{n}$, откуда найдешся $x = -\frac{2a-n}{2n} \pm \sqrt{\frac{2S}{n} + (\frac{2a-n}{2n})^2} = -1 \pm \sqrt{1089} = -1 \pm 33 = 32$ искомое число верстѣ.

Задача. IX. Дана разность n , послѣдній членъ c , и сумма прогрессіи S , найти первой членъ и число членовъ.

Рѣшен. Положимъ первой членъ x , число членовъ y , то въ разсужденіи свойства Арифметической прогрессіи будетъ послѣдній членъ $c=x+(y-1)n=x+ny-n$, а сумма прогрессіи $S=(x+c)\frac{y}{2}$. И такъ изъ первого уравненія найдешся $x=c+n-ny$, а во второмъ $S=(x+c)\frac{y}{2}$ умножь каждую часть на 2, будетъ $2S=(x+c)y = xy+cy$, въ которомъ по перенесеніи членовъ выйдетъ $xy=2S-cy$, а по раздѣленіи на y , найдешся $x=\frac{2S-cy}{y} = c+n-ny$; умножь каждую изъ сихъ частей на y , будешъ $2S-cy=cy+ny-ny^2$, въ коемъ по перенесеніи членовъ

новѣ изъ одной части въ другую, будетъ $ny^2 - ny - 2cy = -2S$; раздѣли на n , выйдетъ $y^2 - \left(\frac{n+2c}{n}\right)y = -\frac{2S}{n}$, откуда найдется $y = \frac{n+2c}{2n} \pm \sqrt{\left(\frac{n+2c}{2n}\right)^2 - \frac{2S}{n}}$; а по извѣстному y найдется и величина x .

Задача. X. Найти четыре числа Арифметической прогрессіи, коихъ произведеніе крайнихъ $= b$, а произведеніе среднихъ $= a$.

Рѣшен. Положимъ первой членъ x , а разность y , то будетъ прогрессія слѣдующая: $x, x+y, x+2y, x+3y$, у которой произведеніе крайнихъ $(x+3y)x = x^2 + 3yx = b$, а произведеніе среднихъ $(x+2y)(x+y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = a$; вычти первое уравненіе изъ сего послѣдняго, останется $2y^2 = a - b$, а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $y^2 = \frac{a-b}{2}$, откуда найдется $y = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)}$; поставь сіе количество въ первомъ уравненіи на мѣсто y , будетъ $x^2 + 3xy = x^2 + 3x\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)} = b$, гдѣ найдется $x = -\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)} \pm \sqrt{b + \frac{9}{4}\left(\frac{a-b}{2}\right)}$; чрезъ что составился требуемая прогрессія.

О пропорціи и прогрессіи Геометрической.

§ 145. Предъ симъ уже объявлено, что содержаніе Геометрическое познается чрезъ дѣленіе предъидущаго члена на послѣдующій. И такъ ежели положимъ, что предъидущій членъ a , послѣдующій b , а знаменатель содержанія d , то будетъ $a : b = d$ или $\frac{a}{b} = d$, гдѣ $a = bd$, то есть предъидущій членъ a равенъ произведенію изъ послѣдующаго и знаменателя содержанія.

§ 146. Теорема. Во всякой пропорціи Геометрической произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ. Дока-

Доказат. I. Пусть будетъ пропорція $a : b = c : d$, въ которой будетъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§ 134). И такъ умножь каждое изъ сихъ количествъ прежде на b , будетъ $a = \frac{bc}{d}$, попомъ умножь на d выйдетъ $ad = bc$ (Часть I § 35).

II. Положимъ, что знаменатель содержанія будетъ q , то по предвидущему предположенію будетъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, при чемъ $a = bq$, и $c = dq$ (§ 145). И такъ поставь въ предложенной пропорціи bq на мѣсто a , а dq на мѣсто c , отъ чего данная пропорція перемѣнится въ слѣдующую: $bq : dq : d$, въ которой произведение крайнихъ $bdq =$ произведению среднихъ bdq , то есть $ad = bc$; примѣръ сей пропорціи есть слѣдующій: $6:3=8:4$, гдѣ также $6 \times 4 = 8 \times 3 = 24$.

Слѣдств. Изъ сей теоремы удобно можно видѣть, что въ непрерывной Геометрической пропорціи $\therefore a : b : c$ произведение крайнихъ равно квадрату средняго члена, то есть $ac = b^2$; потому что показанная непрерывная пропорція можетъ быть изображена такимъ образомъ: $a : b = b : c$ (§ 136), въ которой $ac = bb = b^2$. Примѣръ сей пропорціи есть слѣдующій: $\therefore 18:6:2$, гдѣ также будетъ $18 \times 2 = 36 = 6^2 = 6 \times 6$. Изъ сего явствуетъ, что въ непрерывной Геометрической пропорціи средній членъ $b = \sqrt{ac}$, то есть равенъ квадратному корню изъ произведенія крайнихъ членовъ.

§ 147. **Теорема.** Если четыре величины, на примѣръ, a, b, c, d будутъ такъ разположены,

Н

что

что произведение крайнихъ ad равно произведению среднихъ bc , то такія величины будутъ Геометрически пропорціональны.

Доказат. Поелику когда $ad = bc$, то раздѣля каждую часть сперва на b , будетъ $\frac{ad}{b} = c$; потомъ раздѣля на d , выйдетъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то есть знаменатели содержанія равны, и слѣдовательно составляютъ Геометрическую пропорцію $a:b=c:d$.

Слѣдств. I. Изъ сего видно, ежели изъ четырехъ какихъ нибудь количествъ докажется, что произведение крайнихъ членовъ равно произведению среднихъ, то оныя величины составляютъ Геометрическую пропорцію. На семъ - то утверждается все основаніе пропорціи.

Слѣдств. II. Изъ сего удобно можно видѣть, что изъ всякихъ двухъ равныхъ произведеній произойдетъ Геометрическая пропорція, на примѣръ, когда $ac = mn$, то будетъ одинъ какой нибудь множитель первой части содержаться къ какому нибудь множителю другой части, какъ другой множитель второй части ко второму множителю первой части, то есть $a:t=n:c$ или $c:t=n:a$ и прочая.

Слѣдств. III. Изъ сего явствуетъ, что изъ произведенія ab выйдетъ слѣдующая пропорція: $1:a=b:ab$, то есть единица къ множителю, какъ множимое къ произведенію; также изъ частнаго $\frac{a}{n}$, произойдетъ пропорція $a:n = \frac{a}{n}:1$, то есть дѣлимое къ дѣлителю, какъ

частное къ единицѣ; поелику въ каждой изъ сихъ пропорцій произведение крайнихъ равно произведению среднихъ членовъ, какъ-то въ первой $ab=ab$, во второй $1.a=\frac{an}{n}=a$.

Примѣч.ч. Изъ предъидущихъ предложеній видно, что изъ всякой дроби можно составить Геометрическую пропорцію, въ которой первымъ членомъ будетъ знаменатель, а средними множители числителя, на примѣрѣ: сжали дробь $\frac{ad}{n}$, то будетъ $n:a=d:\frac{ad}{n}$; также изъ

дроби $\frac{6}{4}=\frac{2 \cdot 3}{4}$, произойдетъ слѣдующая пропорція: $4:3=2:\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{1 \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$. Изъ дроби $\frac{1}{2}=\frac{1 \cdot 1}{2}$ будетъ $2:1=1:\frac{1}{2}$.

§ 148. **Теорема.** Изъ пропорцій Геометрической, на примѣрѣ $a:b=c:d$, произойдутъ различныя перемѣны, составляя также Геометрическую пропорцію.

На примѣрѣ :

перемѣняя члены будетъ $a:c=b:d$

обращая - - - - - $b:a=d:c$

слагая - - - - - $\begin{cases} a+b:b=c+d:d \\ a+a:b=c+c:d \\ a:a+b=c:c+d \\ a:b+b=c:d+d \end{cases}$

вычитая - - - - - $\begin{cases} a-b:b=c-d:d \\ a:a-b=c:c-d \end{cases}$

Доказательство. Поелику въ каждой изъ сихъ пропорцій произведение крайнихъ равно произведению среднихъ членовъ; ибо въ положенной Геометрической пропорціи $a:b=c:d$, будетъ $ad=bc$ (§ 146.): посему въ первой и второй

перемѣнной пропорціи будетъ произведение $ad = bc$; въ первой пропорціи изъ слагаемыхъ такое же произведение крайнихъ равно произведению среднихъ, то есть $ad + db = bc + db$; ибо $ad = bc$ по положенной пропорціи, и $bd = bd$, посему помянутыя два произведенія равны между собою. Въ третьей пропорціи той же перемѣнной будетъ $ac + ad = ac + bc$; потому что $ad = bc$. Во второй и четвертой перемѣннѣ произведение $2ad = 2bc$; ибо $ad = bc$. Въ вычитной же первой пропорціи будетъ произведение $ad - bd = bc - bd$, поелику $ad = bc$ и $-bd = -bd$. Во второй пропорціи той же перемѣнной будетъ $ac - ad = ac - bc$, по той же причинѣ, что $-ad = -bc$ и $ac = ac$.

§ 149. Теорема. Ежели въ пропорціи Геометрической $a:b=c:d$ предъидущіе или послѣдующіе члены, также члены перваго содержанія либо втораго, умножатся или раздѣлятся на какое нибудь количество, то произведенія также и частныя ихъ будутъ Геометрически пропорціональны, какъ на примѣръ:

I. $am : b = cm : d$.

IV. $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$.

II. $am : bm = c : d$.

V. $a : bm = c : dm$.

III. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$.

VI. $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$.

Доказательство. Поелику во всякой изъ сихъ пропорціи произведение крайнихъ равно произведению среднихъ членовъ, какъ-то изъ дѣйствія первой, второй и пятой пропорціи будетъ $adm = bct$, а въ прочихъ $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$; ибо въ положенной пропорціи $a:b=c:d$ будетъ $ad = bc$, по-

поэтому $ad \times m = bc \times m$, также и $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$ (Часть I. § 35 и 36).

Слѣдств. Равнымъ образомъ, ежели предъидущіе и послѣдующіе, или члены перваго и втораго содержанія, умножаются или раздѣляются на какое нибудь количество, то произведенія или частныя ихъ будутъ пропорціональны, на примѣръ:

ежели $a : b = c : d$, то будетъ

$$I. am : bm = cm : dm.$$

$$III. am : bm = cn : dn.$$

$$II. \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}.$$

$$IV. \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}.$$

Потому что въ каждой изъ сихъ пропорцій произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ, то есть первой и третій пропорцій будетъ $admn = bcmt$; ибо въ разсужденіи взятой пропорцій $ad = bc$ и $mn = mn$; а во второй и четвертой произведеніе $\frac{ad}{mn} = \frac{bc}{mn}$; потому что $ad = bc$ и $mn = mn$ (Часть I. § 35 и 36).

§ 150. **Опредѣлен.** Пропорція прямая именуется та, у которой первой членъ во столько разъ больше или меньше втораго, во сколько разъ третій больше или меньше четвертаго, какъ на примѣръ $6 : 18 = 4 : 12$. Но ежели первой членъ во столько разъ больше или меньше втораго, во сколько разъ третій меньше или больше четвертаго, такая пропорція именуется обратная, какъ на прим. $6 : 18 = 12 : 4$. И такъ когда пропорція $a : b = c : d$ прямая, то $a : b = d : c$ будетъ обратная.

§ 151. Теорема. Ежели двѣ дроби сѣ разными знаменателями будутъ имѣть одинакихъ числителей, то оныя будутъ въ обратномъ содержаніи своихъ знаменателей, то есть первая дробь ко второй, какъ вторая знаменатель къ первому; какъ на примѣръ:

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{n} = n : b$$

Доказател. Истинна сего предложенія видна изъ того, что произведеніе крайнихъ членовъ $\frac{ab}{b} = a$, равно произведенію среднихъ $\frac{an}{n} = a$.

Прибавлен. Ежели двѣ дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей и разныхъ числителей, то оныя будутъ содержаться между собою, какъ ихъ числители, на примѣръ: $\frac{a}{n} : \frac{c}{n} = a : c$; по тому что произведеніе крайнихъ $\frac{ac}{n} = \frac{ac}{n}$ произведенію среднихъ.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, что одинакія части цѣлыхъ содержатся между собою, какъ ихъ цѣлыя, и обратно цѣлыя содержатся между собою, какъ ихъ одинакія части, какъ на примѣръ $\frac{a}{7} : \frac{c}{7} = a : c$, и $a : c = \frac{a}{7} : \frac{c}{7}$.

§ 152. Опреѣлен. Когда предѣидущіе и послѣдующіе члены нѣсколькихъ содержаній умножаются между собою, тогда такое содержаніе именуется сложное, на примѣръ: ежели члены содержанія $a : b$ или $\frac{a}{b}$ умножаются членами дру-

гаго

того содержанія $c : d$ или $\frac{c}{d}$, то произведенія ихъ $ac : bd$, или $\frac{ac}{bd}$ будетъ содержаніе сложное изъ двухъ содержаній $a : b$ и $c : d$ или $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Ежели . . . $a : b = c : d$

и . . . $e : i = d : q$

$h : s = q : x$,

то будетъ $ach : bis = cdq : dqx$, а по раздѣленіи членовъ вѣсорога содержанія на dq , будетъ $ach : bis = c : x$; при чемъ и говорится, что величина c къ x въ сложномъ содержаніи величинъ $a : b$, $e : i$ и $h : s$.

Прибавлен. Ежели сложное содержаніе произойдетъ отъ двухъ равныхъ содержаній, тогда такое содержаніе называется двойное или квадратное; а когда отъ трехъ, тройное или кубическое; отъ четырехъ равныхъ содержаній четверное и проч. какъ на примѣръ:

$a : b$

$a : b$

$a : b$

$a : b$

$a^2 : b^2$ двойное или $a : b$

квадратное

$a^3 : b^3$, тройное или кубическое.

Слѣдовательно квадратное или двойное, кубическое или тройное содержаніе происходитъ отъ ихъ корней; ибо содержаніе

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$.

И такъ ежели $a : b = c : d$

и $b : e = c : d$

то будетъ $ab : eb = c^2 : d^2$, а по раздѣленіи на b , будетъ $a : e = c^2 : d^2$; при чемъ и го-

воришься, что $a:e$ въ удвоенномъ содержаніи, или содержатся между собою какъ квадраты величинъ c и d .

§ 153. Теорема. Ежели члены одной пропорціи умножаются или раздѣляются на сходственные члены другой пропорціи, то произведенія и частныя ихъ будутъ пропорціональны.

Доказательств. Пусть бу- $a:b=c:d$
дутъ взяты слѣдующія про- $q:h=m:n$
порціи, изъ коихъ подписавъ $aq:bh=cm:nd$
одну подъ другую учинено по- $\frac{a}{q}:\frac{b}{h}=\frac{c}{m}:\frac{d}{n}$
мянупое въ предложеніи дѣй-
ствіе, то отъ того произшедшія какъ про-
изведенія, такъ и частныя, составляютъ Гео-
метрическія пропорціи; ибо въ каждой изъ нихъ
произведение крайнихъ равно произведенію сре-
днихъ членовъ; потому что въ первой изъ
предложенныхъ пропорціи будетъ $ad=bc$, во
второй $qn=hm$, по сей причинѣ, ежели ad
умножится чрезъ qn , а bc чрезъ hm , то бу-
детъ $adqn=bchm$ (Часть I. § 35.); а во вто-
рой пропорціи $\frac{ad}{qn}=\frac{bc}{hm}$, (Часть I. § 36).

Слѣдств. Изъ сего видно, ежели и больше двухъ
пропорцій сходственные члены умножаются между собою,
то произведенія ихъ будутъ Геометрически пропорціо-
нальны; поелику докажется, что произведение крайнихъ,
равно произведенію среднихъ.

§ 154. Теорема. Ежели будетъ рядъ ра-
вныхъ Геометрическихъ содержаній, то будетъ
сумма предъидущихъ содержаться къ суммѣ по-
слѣдующихъ, какъ одинъ какой нибудь предъ-
идущій къ своему послѣдующему.

Дока-

Доказательство. Пусть будетъ рядъ равныхъ содержаній слѣдующій: $a : b = c : d = e : h = x : m$, то будетъ $a + c + e + x : b + d + h + m = a : b$ или $c : d$ и проч.; ибо въ сей пропорціи произведеніе крайнихъ $al + ce + le + bx = ab + ad + ah + am$: поелику $cb = ab$, такъ же въ разсужденіи равенства содержаній въ пропорціи $a : b = c : d$ будетъ $ad = bc$; въ пропорціи $a : b = e : h$, произведеніе $ah = be$; и на послѣдокъ въ пропорціи $a : b = x : m$, будетъ $am = bx$; слѣдовательно и суммы сихъ равныхъ произведеній равны между собою. Помянутая пропорція зовется *складная*.

§ 155. **Теорема.** Ежели три количества a, b, c пропорціональны будутъ другимъ d, h и q , то есть что $a : b = d : h$ и $b : c = h : q$, то будетъ $a : c = d : q$.

Доказательство. Ибо въ первой пропорціи произведеніе $ah = bd$, а во второй произведеніе $bq = ch$, по сей причинѣ будетъ $ah : bd = ch : bq$, естлижъ предвидущіе члены сей пропорціи раздѣлятся на h , а послѣдующіе на b , то будетъ $a : d = c : q$, или $a : c = d : q$ (§ 148).

§ 156. **Теорема.** Ежели въ двухъ пропорціяхъ $a : b = c : d$ и $a : h = q : d$ крайніе члены равны, то вторые члены будутъ въ обратномъ содержаніи съ шретьми, то есть $b : h = q : c$.

Доказательство. Справедливостъ сего видна изъ того, что произведеніе крайнихъ bc равно произведенію среднихъ qd ; ибо въ первой изъ предложенныхъ пропорцій $bc = ad$, а во второй

$ad = bq$; слѣдственно $bc = aq$. Помянутая пропорція именуется *смѣшанная*.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, когда и средніе члены будущъ равны, то первые будущъ въ обратномъ содержаніи послѣднихъ.

§ 157. **Теорема.** Ежели члены пропорціи возвысится въ какую нибудь степень, то и возвышенія ихъ будущъ Геометрически пропорціональны.

Доказательство. Положимъ, что члены предложенной здѣсь пропорціи возвышены будущъ до степени m , $a^m : b^m = c^m : d^m$ то каждая изъ нихъ составляящъ будетъ Геометрическую пропорцію; ибо изъ пропорціи $a : b = c : d$ видно, что $ad = bc$; по сей причинѣ и $a^2 d^2 = b^2 c^2$, также $a^m d^m = b^m c^m$; поелику когда корни равны, то и степени ихъ равны.

Слѣдств. Изъ сего видно, ежели положимъ $m = \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$, то будетъ $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} : d^{\frac{1}{2}}$, то есть, $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$, также и $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$ и прочая.

§ 158. **Теорема.** Ежели изъ пропорціи $a : b = c : d$ составится пропорція $a + b : a + b = c + d : c + d$, а попомъ однѣ величины предъидущихъ членовъ умножашся чрезъ какое нибудь количество, на примѣръ: n , а другія чрезъ m , также однѣ величины послѣдующихъ членовъ чрезъ p , а другія чрезъ q , то произведенія ихъ

ихъ будущъ Геометрически пропорціональны, то есть $an+bm : ar+bv :: n+dm : cr+dq$.

Доказательство. Истинна сего предложенія видна изъ того, что произведеніе крайнихъ $аспр+встр+адм+двqm$ равно произведенію среднихъ $аспр+адмтр+всqn+вдqm$; ибо $аспр = аспр$ и $дqm = вqm$, также $вспр = адмтр$, и $алqn = всqn$, потому что $ад = вc$.

§ 159. **Задача.** Между двухъ величинъ a и b , найти среднее Геометрическое пропорціональное число.

Рѣшен. Въ разсужденіи вопроса будемъ $a : x :: x : b$, при чемъ $x \times x = x^2 = ab$ (§ 146), а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня найдемся $x = \sqrt{ab}$. Ежели $a = 2$, $b = 8$, то будемъ $x = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$.

§ 160. **Задача.** Къ тремъ даннымъ членамъ a , b и c найти четвертое пропорціональное число x .

Рѣшен. Поелику въ пропорціи Геометрической $a : b :: c : x$ произведеніе $ax = bc$, а по раздѣленіи каждой части на a , найдемся $x = \frac{bc}{a}$, то есть четвертой пропорціональной членъ равенъ частному числу, отъ раздѣленія произведенія среднихъ членовъ на первой членъ.

Прибавлен. I. Ежели будемъ $b = c$, то есть ежели пропорція будемъ непрерывная, то будемъ $x = \frac{b^2}{a}$, по сей причинѣ для сысканія претвяго Геометрическаго члена непрерывной пропор-

порціи должно раздѣлитьъ квадратъ средняго члена на первой членъ.

Прибавлен. II. Ежели пошребно будетъ найти какой нибудь изъ среднихъ членовъ Геометрической пропорціи, на примѣръ: шрестій, то будетъ $a : b = x : d$, при чемъ $ad = bx$, а по раздѣленіи на b , найдемся $x = \frac{ad}{b}$, то есть шрестій пропорціональный членъ сыщется, когда произведеніе крайнихъ на второй членъ раздѣлится.

О прогрессіи Геометрической.

§ 161 *Опредѣлен.* Ежели непрерывная Геометрическая пропорція будетъ имѣть болѣе трехъ членовъ, такъ что предъидущій членъ послѣдующаго содержанія равенъ послѣдующему предъидущаго содержанія, какъ на примѣръ, $a : b = b : c = c : d = d : e = e : h$, тогда такой рядъ пропорціональныхъ чиселъ именуется прогрессія Геометрическая, и для краткости пишется такъ $\therefore a : b : c : d : e : h$. Изъ сего видно, что прогрессія Геометрическая есть рядъ чиселъ, изъ коихъ у двухъ сряду стоящихъ членовъ частныя равны, какъ на примѣръ: $\therefore 2 : 4 : 8 : 16 : 32$ и проч. гдѣ знаменатель $= 2$.

Слѣдств. I. Изъ сего удобно можно видѣть, когда положимъ, что знаменатель содержанія $\frac{a}{b} = \frac{1}{p}$, или $\frac{b}{a} = p$, то въ обоихъ случаяхъ будетъ второй членъ $b = ap$, а шрестій членъ

сы-

существует, когда второй членъ въ первомъ случаѣ раздѣлился, а во второмъ умножился на знаменателя содержанія, то есть $ar : \frac{1}{r} = ar^2$ или $ar \times r = ar^2$ и такъ далѣе.

Слѣдств. II. Изъ сего видно, что всякая Геометрическая прогрессія можетъ быть изображена слѣдующимъ образомъ: $\therefore a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 : ar^5 : ar^6$ и проч., поелику предъ симъ уже сказано, что прогрессія есть рядъ количествъ, у которой сряду двухъ стоящихъ членовъ содержанія равны, посему всякой послѣдующій членъ, какъ-то изъ предъидущаго слѣдствія видно, равенъ предъидущему, раздѣленному или умноженному на знаменателя содержанія; слѣдовательно, когда первой членъ $= a$, то второй будетъ ar , третій ar^2 , четвертой ar^3 и проч.

Слѣдств. III. Изъ сего удобно можно видѣть, что всякой членъ Геометрической прогрессіи, на примѣръ, пятой существует, когда первой членъ a знаменателемъ содержанія r , возвышеннымъ въ степень числа предъидущихъ членовъ, умножился; по сей причинѣ послѣдній членъ x какойнибудь прогрессіи неопредѣленнаго числа членовъ существует, когда первой членъ a умножился чрезъ знаменателя r^{n-1} , то есть будетъ $x = ar^{n-1}$.

§ 162. **Теорема.** Въ прогрессіи Геометрической произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію двухъ другихъ какихънибудь членовъ, въ равномъ разстояніи отъ первыхъ находящихся.

Доказат. Справедливость сего удобно можно видѣть изъ предписанной во II. Слѣдствіи § 161 прогрессіи, у которой произведеніе третья-

го члена съ пятымъ то есть $ar^2 \times ar^4$, равно произведенію перваго съ седьмымъ, то есть $a \times ar^6 = a^2r^6$.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что квадратъ какого нибудь члена Геометрической прогрессіи равенъ произведенію двухъ другихъ членовъ, отъ него въ равномъ разстояніи находящихся, какъ-то изъ той же прогрессіи усмотрѣть можно; ибо произведеніе третьяго члена на седьмой есть $ar^2 \times ar^6 = a^2r^8$ равно квадрату пятаго члена, то есть $ar^4 \times ar^4 = a^2r^8$.

§ 163. *Теорема.* Въ прогрессіи Геометрической сумма всѣхъ членовъ безъ послѣдняго къ суммѣ всѣхъ членовъ безъ перваго содержица, какъ первой ко второму.

Доказател. Представимъ себѣ слѣдующую прогрессію — $a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 : ar^5$ и проч. то по силѣ предложенія будетъ $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 : ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 = a : ar$; ибо произведеніе крайнихъ $a^2r + a^2r^2 + a^2r^3 + a^2r^4 + a^2r^5 = a^2r + a^2r^2 + a^2r^3 + a^2r^4 + a^2r^5$ произведенію среднихъ.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, ежели положимъ, что послѣдній членъ $= x$, сумма всѣхъ членовъ прогрессіи $= S$, то будетъ $S - x : S - a = a : ar$, при чемъ произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, то есть $arS - arx = aS - a^2$, откуда найдемъ $rS - S = xr - a$, а по раздѣленіи обѣихъ количествъ на $r - 1$, найдемъ $S = \frac{xr - a}{r - 1}$, то есть сумма всѣхъ членовъ прогрессіи Геометрической, равна разности между про-

произведеніемъ большаго члена на знаменателя и меньшимъ членомъ, раздѣленной на знаменателя безъ единицы.

§ 164 Теорема. Въ прогрессіи Геометрической $\div a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4$ и проч. первое сумма, второе разность, прѣтѣе произведеніе членовъ, безпрерывно одного за другимъ слѣдующихъ, будутъ въ прогрессіи Геометрической.

Доказательство. Слѣдуетъ доказать, что изъ прогрессіи $a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 : ar^5$ и проч. произойдутъ слѣдующія прогрессіи:

$\div a + ar : ar + ar^2 : ar^2 + ar^3 : ar^3 + ar^4$ и проч.

$\div a - ar : ar - ar^2 : ar^2 - ar^3 : ar^3 - ar^4$ и проч.

$\div a^2r : a^2r^3 : a^2r^5 : a^2r^7 : a^2r^9$ и проч.

Справедливость сего видна изъ того, что каждыя двѣ сряду стоящихъ членовъ частныя (знаменатели) одинаки.

§ 165. Теорема. Ежели члены Геометрической прогрессіи возвышены будутъ въ какую нибудь степень, то и степени ихъ также составятъ Геометрическую прогрессію.

Доказательство. Пусть будетъ прогрессія $\div a : ax : ax^2 : ax^3 : ax^4 : ax^5$ и проч. то будетъ также прогрессія и $a^n : a^n x^n : a^n x^{2n} : a^n x^{3n} : a^n x^{4n} : a^n x^{5n}$ и проч. справедливость сего видна изъ того, что каждый послѣдующій членъ равенъ предъидущему, умноженному чрезъ знаменателя x^n .

Слѣдств. Ежели положимъ $n = \frac{1}{2}$, то будетъ $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ и прочая или $\sqrt{a} : \sqrt{ax} : \sqrt{ax} : \sqrt{ax} : \sqrt{ax} : \sqrt{ax}$ и проч. то есть

есѣь квадрапные корни изъ членовъ прогрессіи также составляютъ Геометрическую прогрессію. По сей причинѣ корни претій, четвертой и вообще степени n равномѣрно составляютъ прогрессію Геометрическую, какъ-то $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ax} : \sqrt[n]{ax^2} : \sqrt[n]{ax^3} : \sqrt[n]{ax^4}$ и проч.

Слѣдств. II. Ежели въ прогрессіи Геометрической положимъ $a=1$, знаменатель $=b$, то прогрессія $\div a : ab : ab^2 : ab^3 : ab^4 : ab^5$ и проч. изобразится слѣдующимъ образомъ $\div a^0 : b^1 : b^2 : b^3 : b^4 : b^5$ и проч. Изъ сего видно, что показатели по порядку идущихъ степеней прогрессіи Геометрической суть въ прогрессіи Арифметической.

Слѣдств. III. Изъ сего удобно можно видѣть, когда показатели какой нибудь величины въ прогрессіи Арифметической, то степени оной будутъ въ прогрессіи Геометрической, какъ на примѣръ: $\div a^n : a^{2n} : a^{3n} : a^{4n} : a^{5n}$ и проч. также и $\div a^n : a^{n+r} : a^{n+2r} : a^{n+3r}$ и проч. по-слику частныя между двухъ сряду стоящихъ членовъ суть одинаки.

§ 166. Теорема. Въ прогрессіи Геометрической квадратъ перваго члена содержится къ квадрату втораго, какъ первой къ претіему; также и кубъ перваго къ кубу втораго члена, какъ первой къ четвертому.

Доказат. Положимъ, какъ и прежде прогрессію $\div a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4$ и прочая; то будетъ $a^2 : a^2 r^2 = a : ar^2$; ибо произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ. Также и $a^3 :$

$a^3 : a^3 r^3 = 1 : ar^3$; поелику и въ сей пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ. И вообще ежели число членовъ будетъ n , то первой членъ степени $n-1$ ко второму той же степени, какъ первой къ послѣднему, то есть $a^{n-1} : a^{n-1} r^{n-1} = a : ar^{n-1} *$; ибо произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то есть $a^{n-1} \times ar^{n-1} = a \times a^{n-1} r^{n-1} = a^n r^{n-1}$; или положимъ первой членъ $= a$ второй $= b$, то знаменатель содержанія будетъ $\frac{b}{a}$, а послѣдній членъ $a \times \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$ (§ 161 сл. III); и такъ будетъ $a^{n-1} : b^{n-1} = a : \frac{ab^{n-1}}{a^{n-1}}$, ибо произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то есть $a^{n-1} \times \frac{ab^{n-1}}{a^{n-1}} = a \times b^{n-1}$ (§ 47 слѣд.).

§ 167. Задача. Извѣстенъ первый членъ и знаменатель прогрессіи найти десятой членъ.

Рѣшен. Положимъ первой членъ $3 = a$, знаменатель $2 = b$, число членовъ $10 = n$, то десятой членъ x будетъ $= ab^{n-1} = 1536$ (§ 161).

§ 168. Задача. Данъ первой членъ a , послѣдней b , число членовъ n , найти знаменателя x .

Рѣшен. Поелику послѣдній членъ $b = ax^{n-1}$ (§ 161), то раздѣляя обѣ части сего уравненія на a , будетъ $x^{n-1} = \frac{b}{a}$, откуда найдется $x = \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$, то есть знаменатель прогрессіи выщется, когда изъ частнаго числа, опѣ раздѣленія послѣдняго

О члена

* ar^{n-1} есть послѣдній членъ прогрессіи (§ 160 слѣдств. III).

члена на первой извлечется корень степени числа членовъ безъ единицы.

Прибавлен. Если дано будетъ число членовъ n , знаменатель p и послѣдній членъ b , то первый членъ x сыщется слѣдующимъ образомъ: $x r^{n-1} = b$, гдѣ $x = \frac{b}{r^{n-1}} = \frac{b p}{p^n}$.

§ 169. **Задача.** Извѣстенъ первой членъ a , знаменатель p и число членовъ n , найди сумму прогрессіи.

Рѣшен. Положимъ, что сумма прогрессіи S , второй членъ будетъ $= ar$ (§ 161. Слѣд 1), послѣдній членъ x найдемся по предъидущей Задачѣ; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: $S - x : S - a = a : ar$ (§ 163), при чемъ будетъ $arS - arx = aS - a^2$, раздѣли на a , выйдетъ $rs - rx = S - a$, въ коемъ по переставкѣ членовъ будетъ $rs - S = rx - a$, а по раздѣленіи каждой части на $p - 1$, найдемся $S = \frac{rx - a}{p - 1}$, то есть сумма прогрессіи равна произведенію изъ самаго большаго члена и знаменателя прогрессіи, безъ самаго меньшаго, раздѣленному на знаменателя безъ единицы.

Слѣдств. I. Изъ сего явствуется, 1) если положимъ $p = 2$, $n = 5$, то будетъ самой большой членъ $x = a \times 2^{n-1} = a \times (2)^4 = 16a$, а сумма прогрессіи $S = \frac{16a \times 2 - a}{2 - 1} = 31a$, гдѣ разность между первымъ и послѣднимъ членомъ равна разности между суммою прогрессіи и послѣднимъ членомъ, то есть $16a - a = 15a = 31a - 16a$. 2) Пусть $p = 3$, $n = 5$, то будетъ самой

самой большой членъ $x = a \times (3)^4 = 81a$, а сумма прогрессіи $S = \frac{81ax^3 - a}{3-1} = \frac{242a}{2} = 121a$, гдѣ разность между первымъ и послѣднимъ членомъ равна двойной разности между суммою прогрессіи и самымъ большимъ членомъ, то есть $81a - a = 80a = (121a - 81a) \times 2$. III) Еслии положимъ $p = 4$, $n = 5$, то будетъ самой большой членъ $x = a \times (4)^4 = 256a$, а сумма прогрессіи $S = \frac{256ax^4 - a}{4-1} = \frac{1023a}{3} = 341a$, гдѣ разность между самымъ большимъ и меньшимъ членомъ будетъ равна утроенной разности между суммою прогрессіи и большимъ членомъ, то есть $256a - a = 255a = (341a - 256a) \times 3$, и такъ далѣе.

Слѣдств. II. Изъ сего удобно можно видѣть, когда въ прогрессіи Геометрической будетъ знаменатель содержанія $p = 2$, тогда $x - a = S - x$, откуда найдется $S = 2x - a$; слѣдовательно для сысканія суммы прогрессіи должно изъ удвоеннаго большаго члена вычесть меньшей членъ. А еслии знаменатель $p = 3$, то будетъ $x - a = (S - x) \times 2 = 2S - 2x$, откуда найдется $S = \frac{3x - a}{2}$, то есть изъ утроеннаго большаго члена вычти самой меньшей членъ, разность ихъ раздѣли на знаменателя безъ единицы, получишь сумму прогрессіи. И наконецъ когда $p = 4$, то будетъ $x - a = (S - x) \cdot 3 = 3S - 3x$, гдѣ найдется $S = \frac{4x - a}{3}$, то есть самой большой членъ, четырежды взятой безъ меньшаго, раздѣленной на знаменателя безъ единицы,

О 2

равенъ

равенъ суммѣ прогрессіи. По сей причинѣ сумма убывающей прогрессіи будетъ :

двойнаго содерж. $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} - - \frac{1}{\infty}$ или $0 = 1$

тройнаго - - $\frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \frac{1}{243} : \frac{1}{729} - - \frac{1}{\infty}$ или $0 = \frac{1}{2}$

четвернаго - - $\frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} : \frac{1}{256} : \frac{1}{1024} : \frac{1}{4096} - - \frac{1}{\infty} - - 0 = \frac{1}{3}$

десятернаго - - $\frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} : \frac{1}{100000} - - \frac{1}{\infty} - - 0 = \frac{1}{4}$

Поселику въ каждой изъ сихъ прогрессій самый большой членъ x есть первый, а послѣдній и самой меньшій членъ a есть 0, знаменатель же содержанія p въ первой прогрессіи $= 2$, во второй $= 3$, въ третьей $= 4$, въ четвертой $= 10$;

по сей причинѣ сумма первой прогрессіи $\frac{px-a}{p-1} =$

$\frac{2 \times \frac{1}{2} - 0}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$; сумма второй прогрессіи $\frac{px-a}{p-1}$

$= \frac{3 \times \frac{1}{3} - 0}{3-1} = \frac{1}{2}$; сумма третьей $\frac{px-a}{p-1} = \frac{4 \times \frac{1}{4} - 0}{4-1}$

$= \frac{1}{3}$; и наконецъ сумма четвертой $\frac{px-a}{p-1} =$

$\frac{10 \times \frac{1}{10} - 0}{10-1} = \frac{1}{9}$. Изъ сего видно, что для сиска-

нія всѣхъ частей единицы, составляющихъ безконечно убывающую Геометрическую прогрессію, должно раздѣлить единицу на знаменателя прогрессіи, единицею уменьшеннаго.

§ 170. Задача. Между двухъ данныхъ членовъ a и b найди два среднихъ пропорціональныхъ x и y Геометрической прогрессіи.

Рѣшен. Данные члены составятъ слѣдующую Геометрическую прогрессію: $a : x : y : b$, у которой будетъ $a^3 : x^3 = 1 : b$ (§ 166); причѣмъ $ax^3 = 1^3 b$ раздѣли каждую часть на a ,
вый-

выйдетъ $x^3 = a^2 b$, а по извлеченіи кубическаго корня, найдется $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, то есть первой средний пропорціональной членъ равенъ кубическому корню изъ произведенія квадрата перваго члена на послѣдній b ; а чѣмобъ найти второй средний, то раздѣля квадратъ перваго среднего, то есть $x^2 = \sqrt[3]{a^2 b^2}$ на первой пропорціональной членъ a , получишь второй средний; ибо $a : x :: x : y$, по сей причинѣ $y = \frac{x^2}{a}$. Пусть будетъ $a = 3, b = 81$, тогда будетъ $x = \sqrt[3]{9 \times 81} = \sqrt[3]{729} = 9$; а $y = \frac{9 \times 9}{3} = 27$; но ежели количество $a^2 b$ будетъ несовершенной кубъ, то должно находить помянутые средніе пропорціональные члены x и y посредствомъ десятичныхъ дробей.

§ 171. Задача. Между двухъ количествъ a и b найти n среднихъ пропорціональныхъ Геометрическихъ членовъ.

Рѣшеніе. Положимъ знаменатель прогрессіи x , число членовъ вмѣстѣ съ a и b будетъ $n+2$, и такъ послѣдній членъ $b = ax^{n+1}$ (§ 161); раздѣли обѣ части на a , будетъ $a^{n+1} = \frac{b}{a}$, извлеки изъ обѣихъ частей корень степени $n+1$, найдется $x = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$; потомъ умножь первой членъ a найденнымъ знаменателемъ, выйдетъ второй членъ $a \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$; а когда сей членъ умножится тѣмъ же знаменателемъ, то выйдетъ

третій членъ $a \sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}}$ и такъ далѣе; отъ чего произойдетъ слѣдующая прогрессія: $a : a \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} : a \sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a \sqrt[n+1]{\frac{b^3}{a^3}} : a \sqrt[n+1]{\frac{b^4}{a^4}}$ и проч. : b . Положимъ $n=5$, то будетъ прогрессія $a : a \sqrt[6]{\frac{b}{a}} : a \sqrt[6]{\frac{b^2}{a^2}} : a \sqrt[6]{\frac{b^3}{a^3}} : a \sqrt[6]{\frac{b^4}{a^4}} : a \sqrt[6]{\frac{b^5}{a^5}} : b$. Ежели сіи члены возвышены будутъ въ степень числа членовъ безъ одного, то есть въ шестую степень, то выйдетъ прогрессія слѣдующая: $a^6 : a^5 b : a^4 b^2 : a^3 b^3 : a^2 b^4 : a b^5 : b^6$; поелику частныя между двухъ сряду стоящихъ членовъ равны между собою.

О различныхъ примѣрахъ пропорціи и прогрессіи Геометрической.

§ 172. Опрѣдѣн. Рѣшеніе вопросовъ, зависящее отъ Геометрической пропорціи, называется *тройное правило*, которое въ разсужденіи великаго и полезнаго въ обществѣ употребленія именуется *золотымъ*; и такъ тройное правило есть средство по тремъ извѣстнымъ членамъ сыскивать четвертое пропорціональное число.

Примѣчан. Тройное правило раздѣляется на тройное правило *прямое*, *обратное*, *сложное* и *сладное* или *товарищное*.

§ 173. Тройное прямое правило основано на прямой Геометрической пропорціи, на примѣръ: когда 30 человекъ солдатъ сдѣлаютъ 24 сажени траншей, тогда 50 человекъ солдатъ сколько сажень сдѣлаютъ тѣхъ траншей въ то же время?

мя? Изъ сего вопроса видно, чѣмъ больше людей, тѣмъ больше успѣха въ работѣ въ одно время, по есть число людей въ одинакомъ содержаніи ихъ успѣховъ: и такъ будетъ 30 человекъ содержаться къ 50 человекѣмъ, какъ 24 сажени, сдѣланныя первыми, къ числу сажень, кои сдѣлаютъ послѣдніе въ одно время, по есть $30^{\text{че}} : 50^{\text{че}} = 24^{\text{саж}} : x^{\text{саж}}$; при чемъ $30x = 50 \times 24 = 1200$ (9 146), а по раздѣленіи на 30 найдется $x = \frac{1200}{30} = 40$; или все равно, что для сысканія четвертаго соразмѣрнаго числа, должно второй членъ 50 умножить претѣмъ 24, и произведеніе раздѣлить на первой 30, частное $40 = x$ будетъ искомое число сажень, которое 50 человекъ солдатъ сдѣлаютъ въ то же время, въ которое 30 человекъ сдѣлаютъ 24 сажени.

§ 174. Тройное обратное правило основаніе свое имѣетъ на обращенной Геометрической пропорціи, на примѣръ: когда 4 человека сдѣлаютъ нѣкое дѣло въ три дни, то 5 человекъ во сколько дней ту же работу сдѣлаютъ могутъ. Изъ сего видно, что данные члены прямой пропорціи $4^{\text{чел}} : 5^{\text{чел}} = 3^{\text{дн}} : x^{\text{дн}}$, составивъ не могутъ; поелику въ сей пропорціи 5 больше 4 x , по сему и требуемой x будетъ больше трехъ: но какъ 5 человекъ ту же работу сдѣлаютъ могутъ въ меньшее время, нежели 4 человека въ 3 дни; по сей причинѣ будетъ время 4 человекъ содержаться ко времени 5 человекъ, какъ x къ 3мъ; ибо чѣмъ больше людей, тѣмъ меньше должно употребить время на сдѣланіе того же дѣла, и для того будетъ $4^{\text{че}} : 5^{\text{че}}$

$=x_{ан} : 3_{ан}$, при чемъ $5_{ан}=12$, а по раздѣленіи на 5 найдется $x=2\frac{2}{5}$ дня. $=2$ дни 9 час. 37 минутъ; или по обыкновенному обратному правилу $4^{чс} : 3_{ан} = 5^{чс} : x_{ан}$, при чемъ $4\frac{2}{3}=x$, то есть для сысканія требуемаго числа, должно первой членъ умножить вторымъ и произведение ихъ раздѣлить на третій.

§ 175. *Олрѣдѣлен.* Ежели при трехъ данныхъ членахъ заключается нѣсколько обстоятельствъ, тогда такое правило тройное именуется сложное, и раздѣляется на правило пятерное, семерное и далѣе. Пятерное правило есть способъ чрезъ 5 данныхъ чиселъ находить шестое пропорціональное число. Семерное есть средство, чрезъ семь данныхъ количествъ сыскивать восьмое пропорціональное число и такъ далѣе.

Сложное правило зависитъ отъ сложныхъ содержаній.

Примѣръ пятернаго правила :

Когда за 12 верстъ на три лошади заплачено, 1 рубль 20 коп. то сколько надлежитъ заплатить за 200 верстъ на 8 лошадей.

Въ семъ примѣрѣ главные члены суть версты, а прочее ихъ обстоятельство, и число денегъ будетъ въ сложномъ содержаніи числа верстъ и числа лошадей; по сей причинѣ будетъ

$$12^{вер} : 200^{вер}$$

$$3^{ло} : 8^{ло}$$

$$36 : 1600 = 120ко : x^{ко}, \text{ найдется } x = \frac{1600 \times 120}{36} = 53 \text{ рубл. } 33\frac{1}{3} \text{ копѣки.}$$

До-

Доказателство. Поскольку на 3 лошади за 12 верстѣ по же должно заплашишь, что и одной лошади за 36 верстѣ; также и на 8 лошадей такоежѣ количество заплашишь должно за 200 верстѣ, что и одной за 1600 верстѣ; по сей причинѣ въ разсужденіи одной лошади будетѣ чѣмѣ больше верстѣ, тѣмѣ больше и денегѣ заплашишь должно, то есть какѣ $36^{\text{вер}} : 1600^{\text{вер}} = 120^{\text{коп}} : x$. ч. д. н.

Или по обыкновенному правилу сдѣлай слѣдующее :

$12^{\text{вер}} : 200^{\text{вер}} = 120 : x = \frac{200 \times 120}{12} = 20$ руб. такое число денегѣ заплашишь должно 3 мѣ лошадямѣ за 200 верстѣ; потомѣ $3^{\text{ло}} : 8^{\text{ло}} = 20^{\text{руб}} : y = \frac{20 \times 8}{3} = 53$ рубл. $33\frac{1}{3}$ коп.

Справедливость перваго рѣшенія докажется и посредствомѣ сихѣ двухѣ пропорцій, если только во второй поставится x вмѣсто 20, а потомѣ члены одной пропорціи умножатся членами другой, какѣ слѣдуетѣ:

$$\begin{array}{l} 12^{\text{вер}} : 200^{\text{вер}} = 120^{\text{коп}} : x^{\text{коп}} \\ 3^{\text{ло}} : 8^{\text{ло}} = x : y \end{array}$$

будетѣ $36 : 1600 = 120x : yx$, а по раздѣленіи членовѣ втораго содержанія на x будетѣ $36 : 1600 = 120 : y$ (§ 149).

Примѣръ семернаго правила.

Три человѣка, работающіе въ день по 7 часовѣ, въ два дни выкопали 84 сажени канала; спрашивается сколько сажень выкопаютѣ 5 человѣкѣ въ 3 дни, работающіе въ день по 4 часа.

Разположа члены, какъ слѣдуетъ: 3 чел : 5 чел
 умножь 3 чрезъ 2 и чрезъ 7, про- 2 дн : 3 дн
 изведеніе будетъ 42; попомъ у- 7 час : 4 час
 множь 5 чрезъ 3 и чрезъ 4, произведеніе будетъ
 60 и наконецъ сдѣлай слѣдующую пропорцію:
 42 : 60 = 84 : $x = \frac{60 \times 84}{42} = 120$ требуемое число
 сажень.

Доказательство. Изъ дѣйствія содержаній
 видно, что ту работу которую робашали 3
 человѣка два дни по семи часовъ въ день, одинъ
 человѣкъ сдѣлаетъ въ 42 часа; также сколько
 сдѣлаютъ пять человѣкъ въ 3 дни работая въ
 день по 4 часа, столькожъ сдѣлаетъ одинъ че-
 ловѣкъ въ 60 часовъ; слѣдовательно производ-
 ство работъ сихъ людей въ сложномъ содержа-
 нии числа людей, числа дней и часовъ.

Или по обыкновенному Арифметическому пра-
 вилу сдѣлай слѣдующее:

$$\begin{aligned} 3 \text{ чел} : 5 \text{ чел} &= 84 \text{ саж} : x \text{ саж} = 140. \text{ спол. сраб. } 5 \text{ чел. въ} \\ & \quad 2 \text{ дни работ. } 7 \text{ час.} \\ 2 \text{ дн} : 3 \text{ дн} &= 140 \text{ саж} : y \text{ саж} = 210. \text{ спол. сраб. } 5 \text{ чел. въ} \\ & \quad 3 \text{ дни раб. по } 7 \text{ час.} \\ 7 \text{ час} : 4 \text{ час} &= 210 \text{ саж} : z \text{ саж} = 120 \text{ искомое число саж.} \end{aligned}$$

Истинна перваго рѣшенія докажется и по-
 средствомъ сихъ трехъ пропорцій, естли только
 во второй поставится x вмѣсто 140, а въ
 третій y вмѣсто 210, а попомъ члены сихъ
 пропорцій умножатся между собою, какъ изъ
 слѣдующаго видно

$$3\text{чел} : 5\text{чел} = 84\text{са} : x\text{са}$$

$$2\text{дн} : 3\text{дн} = x\text{са} : y\text{са}$$

$$7\text{час} : 4\text{час} = y : z$$

42 : 60 = 84ху : хуz (6153), а по раздѣленіи членовъ вѣсорога содержанія на ху будетъ 42 : 60 = 84 : z = 120.

Второй примѣръ: Четыре писаря 40 страницъ, изъ коихъ каждая по 20 строкъ, переписутъ въ 2 дня; спрашивается въ какое время 6 писарей напишутъ 60 страницъ, изъ коихъ каждая по 30 строкъ.

Здѣсь дни въ сложномъ содержаніи изъ прямыхъ содержаній числа страницъ и числа строкъ, и обратнаго содержанія числа писарей; и такъ составя сложное содержаніе, сдѣлай пропорцію, какъ и прежде.

$$40\text{стр} : 60\text{стр} \text{ или } 2 : 3$$

$$20\text{стро} : 30\text{стро} \text{ или } 2 : 3$$

$$6\text{пи} : 4\text{пи} \text{ или } 3 : 2$$

$$12 : 18 \text{ или } 2 : 3 = 2\text{дн} : x\text{дн} = 3 \text{ днямъ, искомое время.}$$

Или по обыкновенному правилу будетъ

$$6\text{пи} \cdot 4\text{пи} = 24\text{дн} : x \text{ въ такое время напиш. 6. пис.}$$

40 стран. по 20 строкъ

$$40 : 60 = x : y. \text{ въ такое врем. 6 пис. напиш.}$$

60 стран. въ 20 строк.

$$20 : 30 = y : z. \text{ въ пак. врем. 6 пис. напиш. 60 стран. по 30 строк.}$$

4800 7200 или по раздѣленіи на 2400 будетъ 2 : 3 = 2ху : хуz а по раздѣленіи, вѣсорохъ членовъ на ху будетъ 2 : 3 = 2 : z = 3 дни.

При-

Примѣръ девятернаго правила.

Когда 20 человекъ въ 12 дней, работая въ день по 4 часа, выкопѣ 40 сажень канала, шириною 3 саж. тогда 30 чел. въ 6 дней, работая въ день по 8 часовъ, сколько сажень выкопѣ такого канала, котораго ширина 10 сажень.

Рѣшен. Составя сложныя содержанія, какъ въ предъидущихъ задачахъ показано, наконецъ сдѣлай пропорцію, какъ слѣдуетъ:

$$20 \text{ чел.} : 30 \text{ чел. или } 2 : 3$$

$$12 \text{ дн.} : 6 \text{ дн. или } 2 : 1$$

$$4 \text{ ч.} : 8 \text{ ч. или } 1 : 2$$

$$10 \text{ саж.} : 8 \text{ саж.} \quad 5 : 4 \text{ въ обратн. содержан.}$$

$$20 : 24 \text{ или } 5 : 6 = 40 : x = 48 \text{ иско-}$$

мое число саж.

Тожъ самое произойдетъ и по обыкновенному тройному правилу,

$$20 \text{ чел.} : 30 \text{ чел.} = 40 \text{ саж.} : x$$

$$12 \text{ дн.} : 6 \text{ дн.} = x : y$$

$$4 \text{ ч.} : 8 \text{ ч.} = y : z$$

$$10 : 8 = z : u \text{ въ обратномъ содерж.}$$

$9600 : 11520 = 40xuz : xuz$, а по раздѣлѣніи членовъ перваго содержанія на 1920, а втораго на xuz , будетъ, $5 : 6 = 40 : u = 48$.

§ 176 Тройное складное или товарищное правило основано на складной пропорціи (§ 154), на примѣръ при купцѣ сложились торговать; первой положилъ 200 рубл. другой 400, третій 600 рублей, коими припороговали 240 рублей; спрашивается, сколько которому изъ припору достанется.

ВѢ семѢ вопросѢ сумма 1200 рублей положенныхъ въ торгѢ содержится къ суммѢ припортованныхъ денегъ 240 рубл., какъ положенное въ торгѢ количество денегъ каждаго къ его припорту особенно; отъ чего произойдутъ три слѣдующія пропорціи:

$1200 : 240 = 200 : x = 40$ столько первому.

$1200 : 240 = 400 : x = 80$ столько второму.

$1200 : 240 = 600 : x = 120$ столько третьему.

Другой примѣръ. Три купца, Петръ, Яковъ и Павелъ торговали вообще: перваго 352 рубли въ торгу были 12 мѣсяцовъ, втораго 1072 рубли 3 мѣсяца, третьяго 156 рублей 9 мѣсяцовъ, которыми они вообще припортовали 9581 рубль, спраш., сколько каждому изъ припорту доставается.

Рѣшен. Умножь капиталъныя деньги каждаго чрезъ число мѣсяцовъ, которые они въ торгу были; поелику естъли бы каждой изъ нихъ увеличилъ число своихъ капиталныхъ денегъ во столько разъ, сколько онъ мѣсяцовъ въ торгу были: то бы такимъ числомъ денегъ всякой могъ припортовать столькожъ денегъ въ одинъ мѣсяць, сколько положенными деньгами въ соопвѣстственное имъ число мѣсяцовъ; по сей причинѣ сумма ихъ произведеній (въ разсужденіи одного мѣсяца) будетъ содержаться къ суммѢ припортованныхъ денегъ, какъ произведение капиталныхъ денегъ каждаго на число мѣсяцовъ къ припорту всякаго особенно, и для того произойдутъ три слѣдующія пропорціи:

$$352 \times 12 = 4224$$

$$1072 \times 3 = 3216$$

$$156 \times 9 = 1404$$

$$8844 : 9581 = 4224 : x = 4576 \text{ первому.}$$

$$8844 : 9581 = 3216 : x = 3484 \text{ втором.}$$

$$3844 : 9581 = 1404 : x = 1521 \text{ трет.}$$

Задача I. Одинъ корабль, выступя изъ гавани, плыветъ всякой часъ по 8 верстѣ; потомъ послѣ 12 часовъ за нимъ въ слѣдъ другой пошолъ, и плыветъ всякой часъ по 10 верстѣ; спрашивается, во сколько часовъ и на какомъ разстояніи впорой первого догонитъ.

Рѣшен. Положимъ, впорой корабль первого догонитъ во время x , то время путешествія первого будетъ $x + 12$. И такъ будетъ I) 1 час :

$$12 + x \text{ час} = 8 \text{ вер.} : \frac{(12+x) \times 8}{1} = 96 + 8x. \text{ II) 1 час :}$$

$x \text{ час} = 10 \text{ вер.} : 10x \text{ вер.}$; но какъ перейденныя пространства обоими кораблями между собою будутъ равны, того ради $10x = 96 + 8x$, откуда найдется $x = \frac{96}{2} = 48 \text{ час} = 2 \text{ сутки}$. Потомъ $48 \times 10 = 480$ требуемое разстояніе.

Задача II. Нѣкто нанялъ работника на годъ съ такимъ условіемъ, чтобы за каждой рабочей день платилъ ему по 20 копѣекъ, а за прогульной день вычиталъ у него изъ заработныхъ денегъ по 10 коп.; по прошествіи жъ года нашлось, что хозяинъ работнику долженъ не былъ: спрашивается число рабочихъ и нерабочихъ дней.

Рѣшен. Положимъ 365 дней $= a$, число рабочихъ дней $= x$, нерабочихъ дней будетъ

$a - x$; отъ сего произойдутъ слѣдующія пропорціи: I), $144 : x^2 = 2000 : 20x$, II) $144 : a - x^2 = 1000 : 10a - 10x$; но какъ число заработныхъ денегъ равно числу прогульныхъ денегъ; по сей причинѣ будетъ $20x = 10a - 10x$ или $30x = 10a$, а по раздѣленіи на 30, найдется $x = \frac{10a}{30} = \frac{10 \times 365}{30} = 121\frac{2}{3}$ числу рабочихъ дней; числожъ нерабочныхъ дней будетъ $365 - 121\frac{2}{3} = 243\frac{1}{3}$ дня.

Задача. III. Нѣкто нанялъ слугу на годъ и обѣщалъ ему заплащать 18 рубл. и пару плащя, но слуга по прошествіи 5 мѣсяцовъ получилъ только 4 рубля да пару плащя; спрашивается цѣна плащя.

Рѣшен. Положимъ цѣна плащя x рубл. И такъ будетъ слѣдующая пропорція: $12 : 5 = x + 18 : x + 4$, при чемъ $12x + 48 = 5x + 90$ или $12x - 5x = 90 - 48$, то есть $7x = 42$, а по раздѣленіи на 7, найдется $x = 6$ рубл. = цѣнѣ плащя.

Задача IV. Прудъ двумя трубами наполняется въ 12 минутъ, а одною изъ нихъ въ 20 минутъ; спрашивается въ какое время наполнится другою.

Рѣшен. Положимъ искомое время, въ которое прудъ наполнится другою трубою $= x$ минутъ; отъ сего произойдутъ слѣдующія пропорціи: $x' : 12' = 1 : \frac{12}{x}$ такая часть пруда наполн. друг. трубъ въ 12'. Потомъ $20' : 12' = 1 : \frac{12}{20} = \frac{2}{5}$ такая часть пруда наполнится первою трубою въ 12'; но какъ сіи найденныя части, вмѣстѣ
 взя-

взятыя, составляющѣ величину цѣлаго пруда ; по сей причинѣ будетъ $\frac{12}{x} + \frac{3}{2} = 1$ или $\frac{12}{x} = 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, откуда найдется $2x = 60$, а по раздѣленіи обѣихъ частей на 2, найдется $x = \frac{60}{2} = 30$ искомое время.

Задача V. Требуется найти два числа x и y такого свойства, чтобы меньшее y содержалось къ большому x , какъ 2 : 7, и при томъ частное отъ раздѣленія большаго на меньшее было бы $= 10$.

Рѣшен. По первому условію будетъ $y : x = 2 : 7$, при чемъ $2x = 7y$ (§ 146), гдѣ $x = \frac{7y}{2}$; а по второму будетъ $\frac{x}{y} = 10$ или $x = 10y$: потомъ соединя сіи равныя количества, произойдетъ $10y = \frac{7y}{2}$ или $20y = 7y$, а по раздѣленіи обѣихъ частей на y , будетъ $20 = 7$, чему быть не возможно; слѣдовательно и задача на такихъ условіяхъ естъ не возможна.

Задача VI. Неизвѣстному числу нищихъ дано 240 коп., изъ коихъ нѣкоторымъ дано по 6 коп. а другимъ по 16 коп. и при томъ число первыхъ содержится къ числу другихъ, какъ 2 : 3; спрашивается число нищихъ.

Рѣшен. Положимъ $240 = a$, число нищихъ первыхъ $= x$, вторыхъ y , то по силѣ вопроса будетъ I) $6x + 16y = a$, II) $x : y = 2 : 3$, при чемъ $3x = 2y$ (§ 146). И пакъ изъ перваго уравненія $6x + 16y = a$ найдется $x = \frac{a - 16y}{6}$, а

изъ

изъ втораго $3x=2y$ выйдетъ $x=\frac{2y}{3}$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составя уравненіе $\frac{2y}{3}=\frac{a-16y}{6}$, умножь каждую часть чрезъ 3 и 6, выйдетъ $12y=3a-48y$, откуда найдется $60y=3a$, или $20y=a$, а по раздѣленіи обѣихъ частей на 20, будетъ $y=\frac{a}{20}=\frac{240}{20}=12$ числу нищихъ, коимъ дано по 16 коп.; также $x=\frac{2y}{3}=\frac{24}{3}=8$ числу нищихъ, коимъ дано по 6 коп.; число же всѣхъ нищихъ есть $12+8=20$.

Задача VII Собака усмотрѣла зайца въ разстояніи 50 своихъ скачковъ, которая сдѣлаетъ при скачка въ то время, какъ зайцъ своихъ 4; а когда собака догнала зайца, то нашлось, что число собачьихъ скачковъ отъ мѣста зайца содержится къ числу заячьихъ скачковъ, какъ 2 : 3; спрашивается сколько собака сдѣлала своихъ скачковъ до того мѣста, гдѣ она догнала зайца.

Рѣшен. Положимъ число скачковъ собаки x , а зайца y , то въ разсужденіи вопроса будетъ $x:y=3:4$, при чемъ $4x=3y$, а по раздѣленіи на 4 найдется $x=\frac{3y}{4}$; но какъ собака отъ мѣста зайца сдѣлала $x=50$ скачковъ, то по силѣ вопроса будетъ $x-50:y=2:3$, при чемъ $3x-150=2y$ или $3x=2y+150$, а по раздѣленіи на 3 выйдетъ $x=\frac{2y+150}{3}$; потомъ составя изъ помянутыхъ равныхъ количествъ

уравненіе $\frac{3y}{4} = \frac{2y+150}{3}$, умножь каждую часть сего уравненія чрезъ 3 и чрезъ 4, будетъ $9y = 8y + 600$, или $9y - 8y = 600$, то есть $y = 600 =$ числу заячьихъ скачковъ, а $x = \frac{3y}{4} = \frac{600 \times 3}{4} = 450 =$ числу скачковъ собаки.

Задача VIII. Одинъ изъ трехъ человѣкъ можетъ сдѣлать нѣкое дѣло въ 3 дни, другой ту же работу кончитъ въ 4 дни, а третій въ 5 дней; спрашивается въ какое время, сдѣлать могутъ ту работу всѣ прое вмѣстѣ.

Рѣшен. Пусть будетъ время x , отъ сего произойдетъ слѣдующая пропорція: $3\text{дн} : x\text{дн} = 1 : \frac{x}{3}$, такую часть работы въ искомое время сдѣлаетъ первой человѣкъ; потомъ будетъ $4\text{дн} : x\text{дн} = 1 : \frac{x}{4}$, такую часть дѣла сработаетъ второй въ то же время; и наконецъ $5 : x = 1 : \frac{x}{5}$, такую часть дѣла сдѣлаетъ третій во время x . И такъ сумма сихъ частей, вмѣстѣ взятыхъ, будетъ равна цѣлой вещи, то есть $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 1$, или по исключеніи знаменателей $20x + 15x + 12x = 60$, то есть $47x = 60$, а по раздѣленіи на 47, найдемъ $x = \frac{60}{47} = 1\frac{13}{47} =$ искомому числу дней.

Задача IX. Число 10 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы кубъ первой части содержался къ кубу второй части, какъ 8 : къ 27.

Рѣшен. Положимъ первая часть $= x$, вторая будетъ $10 - x$; и такъ въ разсужденіи вопроса

проса будетъ $x^3 : (10-x)^3 = 8 : 27$, а по извлеченіи изъ каждаго члена кубическаго корня, будетъ $x : 10-x = 2 : 3$ (§ 157), при чемъ $3x = 20-2x$, или $5x = 20$, а по раздѣленіи на 5 найдется $x = \frac{20}{5} = 4$ — первой части; вторая же будетъ $= 6$, изъ коихъ $(4)^3 : (6)^3 = 8 : 27$, то есть $64 : 216 = 8 : 27$.

Задача X. Переплетчикъ продалъ двѣ бѣлыя книги: первую, въ которой было 48 листовъ, за 40 коп. другую, которая имѣла 75 листовъ, за 58 копѣекъ; переплетъ считаетъ въ одной цѣнѣ и бумага одинакой доброты; спрашивается чего переплетъ стоить.

Рѣшен. Положимъ переплетъ стоить x коп. то бумага первой книги стоить $40-x$, второй $58-x$; и такъ будетъ $40-x : 58-x = 48 : 75$, при чемъ $2784 - 48x = 3000 - 75x$ (§ 146), а по переставкѣ членовъ выйдетъ $75x - 48x = 3000 - 2784$, или $27x = 216$; раздѣли на 27, найдется $x = 8$ коп. искомая цѣна переплета.

Задача XI. На чертѣ, которой длина 125 саж. поставлено неизвѣстное число одинакихъ пушекъ, въ разстояніи одна отъ другой на двѣ пушки; а ежели бы длина черты была 208 сажень, тогда бы промежутки были вдвое первыхъ; спрашивается число пушекъ.

Рѣшен. Положимъ число пушекъ x , число промежутковъ будетъ $x-1$; но какъ въ-каждомъ промежуткѣ поставиши 2 пушки, то число пушекъ въ промежуткахъ будетъ $(x-1).2 = 2x-2$; посему число всѣхъ пушекъ сряду

было бы $2x-2+x=3x-2$; а во второмъ случаѣ число пушекъ въ промежуткахъ будетъ $(x-1) \times 4=4x-4$, числожъ всѣхъ пушекъ сряду было бы $4x-4+x=5x-4$; по сей причинѣ будетъ $3x-2:5x-4=125:208$; при чемъ $625x-500=624x-416$; а по переставкѣ членовъ выйдетъ $625x-624x=500-416$, то есть $x=84$ искомое число пушекъ.

Задача XII. Нѣкто смотрѣлъ на часы, а другой спросилъ, которой часъ? ему отвѣтствовано, часовая стрѣлка между девятымъ и десятымъ часомъ съ минушною въ одной почкѣ; спрашивается число минушъ десятого часа.

Рѣшен. Положимъ, часть десятого часа есть x . Стрѣлка минушная отъ почки, показывающей 12 часовъ, до соединенія съ часовою перейдетъ $x+9$ частей круга въ то время, когда часовая перейдетъ помянутую часть x ; и такъ будетъ $x+9:x=12$ част.: 1 част., при чемъ $12x=x+9$ или $12x-x=9$, то есть $11x=9$, а по раздѣленіи на 11, найдемся $x=\frac{9}{11}$ $=49\frac{1}{11}$ минуты, искомое время десятого часа.

Задача XIII. Два указателя имѣютъ общую ось, коихъ начало движенія послѣдовало отъ одной почки: одинъ описываетъ свой кругъ въ 12 часовъ, а другой тотъ же кругъ въ 16 часовъ; спрашивается, въ какое время они соединятся опять въ прямое положеніе.

Рѣшен. Положа искомое число часовъ x , сдѣлай слѣдующія пропорціи: первую, 12 часовъ къ искомому времени x , какъ одно обращеніе къ
обра-

обращенію перваго указателя въ искомое время, то есть $12 : x = 1 : \frac{1}{12}x$; впрочемъ, $16 : x = 1 : \frac{1}{16}x$; но какъ разность обращеній между первымъ и вторымъ указателемъ до соединенія ихъ въ прямое положеніе есть только одно обращеніе круга, по сей причинѣ будетъ $\frac{x}{12} - \frac{x}{16} = 1$, откуда найдемъ $\frac{x}{48} = 1$, или $x = 48 =$ искомому числу часовъ до соединенія указателей въ прямое положеніе.

Прибавлен. Посредствомъ сей задачи разрѣшается и слѣдующее предложеніе: когда луна находится между солнцемъ и землею въ одной плоскости вертикальнаго круга, тогда говорится, что солнце въ прямомъ положеніи съ луною, что и называется *новолѣніемъ*. И такъ когда намъ по Астрономическимъ наблюденіямъ извѣстно, что земля совершаетъ свой кругъ въ 365 дней, 5 часовъ, 48 $\frac{3}{4}$ минуты, или 365 $\frac{93}{384}$ дней, а луна въ 27 дней 7 часовъ

43 $\frac{1}{4}$ минуты, или 27 $\frac{5557}{17280}$, то найдемъ, въ какое время, считая отъ перваго противуположія, луна опять придетъ въ прямое положеніе съ землею въ разсужденіи неподвижности солнца, то есть существа время отъ одного новолѣсія до другаго. Для сего положимъ искомое время x , $365\frac{93}{384} = a$, $27\frac{5557}{17280} = b$, отъ чего произойдутъ

по силѣ вопроса слѣдующія пропорціи: 1) $a : x = 1 : \frac{x}{a}$,

ii) $b : x = 1 : \frac{x}{b}$; а изъ сего по предложенной задачѣ бу-

детъ $\frac{x}{b} - \frac{x}{a} = 1$ (то есть разность обращеній луны съ

землею есть 1 обращеніе), гдѣ умножь обѣ части уравненія сперва чрезъ b , а потомъ чрезъ a , будетъ $ax - bx$

$= ab$; откуда найдемъ $x = \frac{ab}{a-b} = (365\frac{93}{384} \times 27\frac{5557}{17280}) \times$

$(365\frac{93}{384} - 27\frac{5557}{17280}) = 29$ дней, 12 часовъ, 6 минутъ, полагая равномерное земли и луны движеніе.

Задача XIV. Нѣкто имѣетъ двухъ цѣнъ вино, перваго бублика 45 коп. другаго 32 коп.

изъ коего желаетъ смѣшать 26 бутылокъ, такъ чтобы смѣшаннаго бутылка была въ 40 коп. спраш. сколько бутылокъ каждого вида въ смѣшеніе взять надлежитъ.

Рѣшеніе. Положимъ $26 = q$, $45 = a$, $32 = b$, $40 = c$, и что перваго вина берется въ смѣшеніе x бутылокъ, втораго, которое меньшей цѣны, будетъ $q - x$. И такъ умножь a числомъ бутылокъ x , произведеніе ax будетъ цѣна бутылки хорошаго вина; потомъ умножь b числомъ бутылки $q - x$ дешеваго вина, произведеніе $(q - x)b = bq - bx$ будетъ цѣна втораго вина. Сумма сихъ цѣнъ будетъ равна цѣнѣ смѣшиваемаго вина, то есть $26 \times 40 = qc$; по сей причинѣ, $ax + bq - bx = cq$, или (по переставкѣ членовъ) $ax - bx = cq - bq$, то есть $x \times (a - b) = q \times (c - b)$, а по раздѣленіи на $a - b$, найдемся $x = q \times \frac{c - b}{a - b} = 26 \times \frac{40 - 32}{45 - 32} = 26 \times \frac{8}{13} = 16 =$ числу бутылки перваго вина, а $q - x = 26 - 16 = 10 =$ числу бутылки дешеваго вина.

Примѣчаніе. Изъ уравненія $x = q \times \frac{c - b}{a - b}$ произойдетъ слѣдующая пропорція: $a - b : c - b = q : x$; слѣдовательно ежели положимъ количество втораго вина $= y$, то будетъ $y = q \times \frac{a - c}{a - b}$, изъ чего выйдетъ $a - b : a - c = q : y$. На сей-то пропорціи основано Ариеметическое правило смѣшенія; ибо сопоставя данныя цѣны по правилу Ариеметическому и учиня дѣйствіе, какъ слѣдуетъ:

a	-	-	-	$c - b$	должно будетъ сдѣлать слѣдующую пропорцію: $a - b : c - b = q : x = q \times \frac{c - b}{a - b} =$
b	-	-	-	$a - c$	
сумма $= a - b$					количеству перваго вина; потомъ $a - b :$
$a - c = q : y = q \times \frac{a - c}{a - b}$					колич. втораго вина.

Задача XV. Серебра фунтѣ цѣною $= a$, мѣди фунтѣ цѣною $= b$, потребно сдѣлать фунтѣ серебра, смѣшаннаго изъ перваго серебра и мѣди, цѣною $= c$; спрашивается сколько котораго металла въ смѣшеніе взять надлежитъ.

Рѣшен. Положимъ, что берется въ смѣшеніе серебра x фунтовъ, мѣди будетъ $1 - x$. Потомъ сдѣлай слѣдующія пропорціи: 1) одинъ фунтѣ содержится къ x , какъ цѣна одного фунта серебра къ цѣнѣ того серебра, которое положится въ смѣшеніе, то есть $1 : x = a : ax$, 11) $1 : 1 - x = b : b - bx$. Сумма сихъ найденныхъ цѣнъ будетъ равна положенной въ вопросѣ цѣнѣ c , то есть $ax - bx + b = c$, а пересчитав члены будетъ $ax - bx = c - b$ или $(a - b)x = c - b$, откуда найдемъ $x = \frac{c - b}{a - b}$. Или

по обыкновенному Ариѳметическому правилу:

$$\begin{array}{l} b \quad a - c \\ - c \\ a \quad c - b \\ \hline \text{сумма } a - b \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{a - c}{a - b} \\ \frac{c - b}{a - b} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{столько должно взять мѣди} \\ \text{столько серебра въ смѣшеніе} \end{array}$$

положить должно.

И такъ положимъ что фунтѣ даннаго серебра стоить 24 рубл. 50 коп. мѣди 50 коп. а фунтѣ пребуемаго серебра 16 рублей 50 коп.; то будетъ $a = 2450$, $b = 50$, $c = 1650$; посему $x = \frac{c - b}{a - b} = \frac{1650 - 50}{2450 - 50} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ фунта $=$ искомому числу серебра, а мѣди $\frac{1}{3}$ фунта. Но дабы увѣришься о справедливости сего вопроса, то $\frac{2}{3} \times 2450 = 1633\frac{1}{3}$, и $\frac{1}{3} \times 50 = 16\frac{2}{3}$, коихъ сумма $1633\frac{1}{3} + 16\frac{2}{3} = 1650 =$ цѣнѣ пребуемаго серебра.

Задача XVI. Нѣкто имѣетъ вино двухъ сортовъ такой цѣны, что ежели смѣшать 2 кружки хорошаго съ 3 мя дешеваго, то смѣшаннаго кружка будетъ стоить 21 коп.; а когда 7 кружекъ хорошаго смѣшать съ 8 ю дешеваго, то цѣна кружки смѣшаннаго будетъ 22 коп. спраш. цѣна кружки каждаго вина.

Рѣшен. Пусть будетъ цѣна кружки хорошаго вина x , дешеваго y , то будетъ I) $2x + 3y = 5 \times 21 = 105$, II) $7x + 8y = 15 \times 22 = 330$. Изъ перваго уравненія найдемся $x = \frac{105 - 3y}{2}$, а изъ втораго $x = \frac{330 - 8y}{7}$; потомъ составя изъ найденныхъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{330 - 8y}{7} = \frac{105 - 3y}{2}$, умножъ каждую часть чрезъ 7 и 2 выйдемъ $660 - 16y = 735 - 21y$, а переставя члены, будетъ $21y - 16y = 735 - 660$, или $5y = 75$, откуда найдемся $y = \frac{75}{5} = 15 =$ цѣнѣ дешеваго вина, а цѣна хорошаго вина $x = \frac{105 - 3y}{2} = \frac{105 - 45}{2} = 30$.

Задача XVII. Двадцать фунтовъ золота вѣсятъ въ водѣ 19 фунтовъ, 11 фунтовъ серебра вѣсятъ въ водѣ 10 фунтовъ; спрашивается, сколько будетъ золота и серебра въ такомъ кускѣ, которой во 106 фунтовъ вѣситъ въ водѣ 98 фунтовъ.

Рѣшен. Положимъ, что въ кускѣ содержится золота x фунтовъ, серебра будетъ
106 - x .

106— x . И такъ по свойству вопроса, будетъ
 $20 : x = 19 : \frac{19x}{20} =$ въсящему количеству въ водѣ
 золоша, находящагося въ кускѣ; потомъ 11 :
 $106 - x = 10 : \frac{(106 - x) \cdot 10}{11} =$ въсящему количеству
 въ водѣ серебра, находящагося въ кускѣ. Сумма
 сихъ найденныхъ количествъ будетъ равна по-
 му количеству, которое данной кусокъ въсипѣ
 въ водѣ, то есть $\frac{19x}{20} + \frac{1060 - 10x}{11} = 98$; умножъ
 каждую часть сего уравненія чрезъ 20 и чрезъ
 11, выйдетъ $209x - 200x + 21200 = 21560$, въ
 коемъ переславя члены и сокращая одинакія ве-
 личины будетъ $9x = 360$, а по раздѣленіи на 9,
 найдемся $x = \frac{360}{9} = 40 =$ искомому числу фу-
 нтовъ золоша, а серебра будетъ $106 - x = 106$
 $- 40 = 66$ фунтовъ.

Задача XVIII. Нѣкто имѣетъ три равновѣс-
 ные слитка, составленные изъ разныхъ ме-
 талловъ, первой состоитъ
 изъ 7 лот. серебр. 3 лот. мѣд. и 6 лот. олов. $= 16$
 2й, 12 лот. серебр. 3 лот. мѣд. и 1 лот. - $= 16$
 3й, 4 лот. серебр. 7 лот. мѣд. и 5 лот. олов. $= 16$
 изъ кого желаетъ составить четвертой ку-
 сокъ, въ которомъ бы содержалось 8 лотовъ се-
 ребра. $3\frac{3}{4}$ лот. мѣди, $4\frac{1}{4}$ олова; спрашивается,
 сколько должно взять отъ каждого изъ по-
 мянутыхъ слитковъ въ смѣшеніе требуемаго
 куска.

Рѣшен. Положимъ, взять должно число лотовъ отъ
 перваго куса x , отъ втораго y , отъ третьяго z ; но
 II 5 какъ

какъ каждой кусокъ изъ данныхъ вѣсомъ 16 лотовъ, то надлежитъ сдѣлать слѣдующую пропорцію: 16 лот. содержится къ требуемому количеству x первого куска, какъ 7 лот. серебра, находящагося въ немъ, будетъ содержаться къ количеству серебра, слѣдующему въ смѣшеніи отъ первого куска, то есть $16 : x = 7 : \frac{7x}{16}$; рав-

нымъ образомъ $16 : y = 12 : \frac{12y}{16}$ количеству серебра

отъ второго куска, также $16 : z = 4 : \frac{4z}{16}$ количеству серебра отъ третьяго куска. Сумма сихъ найденныхъ

количествъ $\frac{7x}{16} + \frac{12y}{16} + \frac{4z}{16} = 8$ количеству серебра пре-

буемаго куска, или $7x + 12y + 4z = 128$. Потомъ сдѣлай еію пропорцію: 16 лотовъ содержится къ требуемому количеству x первого куска, какъ 3 лота находящейся въ немъ мѣди будетъ содержаться къ количеству мѣди, слѣдующей въ смѣшеніи отъ первого куска, то есть

$16 : x = 3 : \frac{3x}{16}$; равнымъ образомъ сыщи количество

слѣдующей въ смѣшеніи мѣди отъ второго куска чрезъ

слѣдующую пропорцію: $16 : y = 3 : \frac{3y}{16}$; также и $16 : z$

$= 7 : \frac{7z}{16}$ количеству мѣди отъ третьяго куска. Сум-

ма сихъ найденныхъ количествъ $\frac{3x}{16} + \frac{3y}{16} + \frac{7z}{16} = 3\frac{3}{4}$ или

$3x + 3y + 7z = 60$. Наконецъ сыщи подлежащія части олова въ требуемое отъ каждого куска смѣшеніе па-

кииъ образомъ: $16 : x = 6 : \frac{6x}{16}$, также $16 : y = 1 : \frac{y}{16}$; и

$16 : z = 5 : \frac{5z}{16}$, коиъ сумма $\frac{6x}{16} + \frac{y}{16} + \frac{5z}{16} = 4\frac{1}{4}$ или $6x + y$

$+ 5z = 68$, отъ чего произошли три слѣдующія уравне-

нія: I) $7x + 12y + 4z = 128$, II) $3x + 3y + 7z = 60$, III) $6x + y + 5z = 68$, изъ коиъ въ первомъ найдемъ

$x = \frac{128 - 12y - 4z}{7}$, во второмъ $x = \frac{60 - 3y - 7z}{3}$, въ

третьемъ $x = \frac{68 - y - 5z}{6}$. Составь изъ сихъ равныхъ

количествъ два слѣдующія уравненія: I) $\frac{128-12y-4z}{7}$

$\frac{60-3y-7z}{3}$, II) $\frac{60-3y-7z}{3} = \frac{68-y-5z}{6}$, изъ коихъ въ

первомъ, по умноженіи каждой части чрезъ 3 и 7, будетъ $384-36y-12z=420-21y-49z$, въ коемъ переставя члены выйдемъ $49z-12z=420-384+36y-21y$, или $37z$

$=36+15y$, а по раздѣленіи на 37, найдемъ $z = \frac{36+15y}{37}$.

Во второмъ умножа каждую часть чрезъ 3 и 6, будетъ $204-3y-15z=360-18y-42z$, гдѣ переставя члены, выйдемъ $42z-15z=360-204+3y-18y$, или $27z=156-15y$,

а по раздѣленіи на 27 найдемъ $z = \frac{156-15y}{27} = \frac{52-5y}{9}$.

Нанослѣдокъ изъ сихъ двухъ равныхъ у количествъ составъ последнее уравненіе $\frac{36+15y}{37} = \frac{52-5y}{9}$, откуда найдемъ $y=5$ лотъ. — пому всѣу, сколько должно взять

отъ второго куска. Также $z = \frac{52-5y}{9} = \frac{52-25}{9} = 3 =$

числу лотовъ, сколько слѣдуетъ взять отъ третьяго;

равнымъ образомъ $x = \frac{68-y-5z}{6} = \frac{68-5-15}{6} = \frac{48}{6} = 8 =$

числу лотовъ, которое должно взять отъ перваго куска.

Задача XIX. Кубической футъ морской воды веситъ 72 фунта, дождевой $69\frac{1}{2}$, колодезной 71 фунтъ, найти, какія части кубическаго фута взять должно морской воды и дождевой, дабы она сдѣлалась одной тяжести съ колодезною.

Рѣшеніе. Положимъ, взять должно дождевой воды x футъ. морской, будетъ $1-x$; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ кубической футъ содержится къ искомой части x дождевой воды, такъ всѣхъ кубическаго фута дождевой воды къ всѣу той части кубическаго фута, которую составляютъ искома дождевая вода, то есть $1:x=69\frac{1}{2}:69\frac{1}{2}x$; потомъ: кубической футъ морской воды содержишя къ искомой части $1-x$ той же

же воды, какъ всѣхъ кубическаго фута оной воды къ вѣсу искомой части, то есть $1:1-x=72:(1-x) \cdot 72=72-72x$; но какъ сѣи найденныя части, вмѣстѣ взятые, должны быть равны вѣсу колодезней воды, того ради будемъ $69\frac{1}{2}x+72-72x=71$, или $72-2\frac{1}{2}x=71$, а по переставкѣ членовъ $72-71=2\frac{1}{2}x$, или $1=2\frac{1}{2}x$, раздѣли обѣ части на $2\frac{1}{2}$, найдемъ $x=\frac{1}{5}$ части кубическаго фута дождевой воды, а воронкой $1-x=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$; кои вмѣстѣ взятые равны кубическому футу, и одного вѣса съ колодезною.

Задача XX. Данъ вѣсъ тѣла $D=m$ фунтовъ, составленнаго изъ двухъ тѣлъ A и B . найти, сколько котораго изъ сихъ тѣлъ взято въ смѣшеніи.

Рѣшен. Положимъ въ тѣлѣ D терлешъ въ годѣ a фунтовъ, тѣло $A=d$ фунт. терлешъ въ водѣ b фунтовъ, а тѣло $B=n$ фунтовъ терлешъ въ водѣ c фунтовъ; также въ тѣлѣ D тяжелаго тѣла A x фунтовъ, то тѣла B въ тѣлѣ D будемъ $m-x$ фунт. отъ сего произойдути слѣдующія пропорціи: I) вѣсъ тѣла A къ потерянному въ водѣ вѣсу того же тѣла, какъ искомой вѣсъ сего тѣла, заключающійся въ тѣлѣ D , къ потеряннѣю въ водѣ своего вѣса, то есть $d:b=x:\frac{bx}{d}$ той части вѣса, которую терлешъ въ водѣ x фунт.

II) $n:c=m-x:\frac{(m-x)c}{n}$ той части, которую терлешъ въ водѣ $m-x$ фунт. Но какъ найденныя части, вмѣстѣ взятые, должны быть равны потеряннѣю вѣса въ водѣ даннымъ тѣломъ D , то сумма ихъ будемъ $\frac{bx}{d} + \frac{(m-x)c}{n} = a$. Умножь каждую часть чрезъ d и n , будемъ $nbx + mdc - dcx = and$, или $nbx - dcx = and - mdc$, откуда найдемъ $x = \frac{and - mdc}{nb - dc}$ вѣсу тѣла A , заключающемуся въ данномъ тѣлѣ D ; также и часть тѣла B , содержащагося въ тѣлѣ D $m-x = m - \frac{(an - mc)d}{nb - dc} = \frac{mnb - and}{nb - dc}$.

Задача XXI. Одинъ крестьянинъ мѣнялъ зайцовъ на домашнихъ курицъ, бралъ за всякихъ двухъ зайцовъ по три курицы; каждая курица снесла яицъ третью часть пропивъ числа всѣхъ курицъ. Крестьянинъ, продавая яйца, бралъ за каждыя девять яицъ по столько копѣекъ, сколько каждая курица яицъ снесла, за которыя выручилъ онъ 24 алтына; спрашивается число яицъ и курицъ.

Рѣшен. Положимъ число зайцовъ x , число курицъ найдется чрезъ слѣдующую пропорцію:
 $2 : 3 = x : \frac{3x}{2}$. Каждая курица снесла яицъ $\frac{x}{2}$,
 посему число всѣхъ яицъ будетъ $\frac{3x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{3x^2}{4}$;
 потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: $9 : \frac{3x^2}{4}$
 $= \frac{x}{2} : \frac{3x^3}{72} = \frac{x^3}{24}$ числу вырученныхъ денегъ, по
 естѣ $\frac{x^3}{24} = 72$, или $x^3 = 24 \cdot 72 = 8 \cdot 8 \cdot 27$, от-
 куда найдется $x = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 27} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ —
 числу зайцовъ; числожъ курицъ $\frac{3x}{2} = 18$.

Задача XXII. Два человека А и В пошли въ одно время съ разныхъ мѣстъ по одной дорогѣ, и по схожденіи ихъ вышло, что человекъ А перешелъ 30 верстъ больше, нежели В, и при томъ А сказалъ В: я бы твое разстояніе могъ перейти въ 4 дни, а В сказалъ А, а я твое разстояніе могъ бы перейти въ 9 дней; спрашивается разстояніе мѣстъ.

Рѣшен.

Рѣшен. Положимъ перейденное разстояніе человекомъ $B=x$, то А перешелъ $x+30$, по сей причинѣ произойдутъ слѣдующія пропорціи: $x : x+30 = 4 : \frac{4x+120}{x}$ (время, въ которое А перейдетъ свое разстояніе); потомъ $x+30 : x = 9 : \frac{9x}{x+30}$ (время въ которое В перейдетъ свое разстояніе); но какъ времена продолженія ихъ пущей суть равны, посему будетъ $\frac{9x}{x+30} = \frac{4x+120}{x}$; откуда найдется $9x^2 = 4x^2 + 240x + 3600$, въ которомъ по перенесеніи членовъ, выйдетъ $5x^2 - 240x = 3600$, а по раздѣленіи на 5 будетъ $x^2 - 48x = 720$, откуда найдется $x = 24 \pm \sqrt{1296} = 24 + 36 = 60$, сїолько верстѣ перешелъ В, и А перешелъ $x+30 = 60+30 = 90$; между коими разстоянія было $60+90 = 150$ верстѣ.

Задача XVIII. Два купца положили въ торгъ 140 рублей, коими припорговали 130 рублей, по раздѣлу у перваго нашлось и съ прибыткомъ 120 рублей, котораго деньги въ торгу были 2 мѣсяца, у втораго нашлось 150 рубл. а въ торгу были 6 мѣсяцовъ; спрашив. сколько коюрой въ торгъ денегъ положилъ.

Рѣшен. Пусть число положенныхъ въ торгъ денегъ перваго x , втораго будетъ $140-x$. Прибытокъ перваго $120-x$, втораго $150-140+x = 10+x$; отъ сего произойдутъ слѣдующія пропорціи: $2x : 6(140-x) = 120-x : 10+x$ (по велику прибытки въ сложномъ содержаніи временъ и капиталныхъ денегъ), или по раздѣленіи на 2, будетъ $x : 3(140-x) = 120-x : 10+x$
при

при чемъ будетъ $3x^2 - 780x + 50400 = x^2 + 10x$,
въ коемъ переславя члены и раздѣля каждую
часть на 2, будетъ $x^2 - 395x = -25200$, откуда
найдется $x = \frac{395}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{156025}{4} - 25200\right)} = \frac{395}{2} \pm \frac{235}{2}$
 $= 80 =$ числу капиталныхъ денегъ первого,
а прибытокъ его $120 - 80 = 40$; числожъ капи-
талныхъ денегъ втораго будетъ $140 - 80 = 60$,
а прибытокъ его будетъ $150 - 60 = 90$ рублей.

Примѣчан. Въ семъ вопросѣ произошло одне толь-
ко рѣшеніе, принявъ отрицательной корень; ибо ес-
ли возьмется положительной корень $\frac{395}{2}$, то число денегъ
перваго x будетъ $= 315$ больше, нежели общая ихъ сумма.

Задача XXIV. Нѣкто купилъ лошадь за
неизвѣстное число рублей, а продалъ оную за
119 рублей, при чемъ получилъ на 100 рубл.
столько прибытку, чего вся лошадь стоила;
спрашивается, сколько онъ за нее денегъ запла-
тилъ.

Рѣшен. По предъидущимъ правиламъ най-
дется, что за лошадь заплачено 70 рубл.

Задача XXV. Двѣ крестьянки продали 100
яицъ, изъ коихъ у одной было больше другой,
денегъ же выручили по ровну. Первая сказала дру-
гой: ежели бы пивои яицы были у меня, то бы
я выручила 15 алтынъ; а другая отвѣтствовала,
а я бы за пивои яицы взяла $6\frac{2}{3}$ алтына;
спрашивается, сколько у каждой яицъ было.

Рѣшен. Соображаясь съ предъидущими пра-
вилами, найдется, что у первой было 40 яицъ,
а у второй 60.

Задача XXVI. Два купца продали нѣсколько
аршинъ бархату, изъ коихъ второй 3 аршина
боль-

больше первого, а выручили вмѣстѣ 35 рублей; послѣ продажи первой сказалъ другому: я бы за пвой бархатъ могъ взять 24 рубли; другой ему оповѣстивовалъ: а я бы за пвой бархатъ получилъ $12\frac{1}{2}$ рублей; спрашивается сколько аршинъ каждой изъ нихъ имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ, у первого было x арш. то у второго будетъ $x + 3$ арш. Но поелику ежели бы первой могъ продать $x + 3$ за 24 рубли, то за какую бы онъ цѣну продалъ свои x аршинъ, что найдется чрезъ слѣдующую пропорцію: $x + 3 : 24 = x : \frac{24x}{x+3}$; такимъ же образомъ сыщи цѣну, за какую второй продалъ свое сукно, чрезъ слѣдующую пропорцію: $x : 12\frac{1}{2} = x + 3 : \frac{x+3}{x} \times 25 = \frac{25x+75}{2x}$. Сумма сихъ найденныхъ цѣнъ будетъ $\frac{25x+75}{2x} + \frac{24x}{x+3} = 35$, а умножа каждую часть чрезъ $2x$, и $x+3$, будетъ $73x^2 + 150x + 225 = 70x^2 + 210x$, въ коемъ переставя члены, выйдетъ $3x^2 - 60x = -225$, а по раздѣленіи каждой части на 3, будетъ $x^2 - 20x = -75$; откуда найдется $x = 10 \pm \sqrt{(100 - 75)} = 10 \pm 5 =$ числу аршинъ первого, а второго будетъ $10 \pm 5 + 3$.

Примѣчаніе. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенія: по первому первой имѣетъ 15 аршинъ, а другой 18; но какъ первой за 18 аршинъ получилъ бы 24 рубли, то за свои 18 взялъ онъ 20 рубл; другой за 15 аршинъ взялъ бы $12\frac{1}{2}$ рублей, то за свои 18 взялъ онъ 15 рубл. коихъ сумма $= 35$ рубл. По второму рѣшенію первой имѣлъ 5 аршинъ, а другой 8, и когда первой продалъ бы 8 аршинъ за 24 рубли, то свои 5 арш. продалъ за 15 рублей, дру-

гой

гой 5 аршинъ перваго продалъ бы за $12\frac{1}{2}$, то свои 8 арш. продалъ онъ за 20 рубл. коиъ сумма также = 35 рубл.

Задача XXVII. Купецъ торгуетъ положенными въ торгъ 100000 рублями съ убыткомъ, такъ что оставшаяся сумма послѣ перваго года безъ $\frac{4}{25}$ всего капитала равна оставшейся суммѣ послѣ двухъ лѣтъ; спраш. сколько онъ теряетъ отъ 100 рубл въ каждой годъ.

Рѣш. н. Пусть будетъ 100000 рубл. = a , $\frac{4a}{25} = b$, 100 = n , искомое число = x . И такъ сдѣлай сѣю пропорцію: $100 : 100 - x = a : a \times \frac{100 - x}{100} = a \cdot (1 - \frac{x}{100})$ = количеству капитала послѣ перваго года; потомъ сдѣлай еще слѣдующую пропорцію: $100 : 100 - x = a \cdot (1 - \frac{x}{100}) : a \times \frac{100 - x}{100} \times \frac{100 - x}{100} = a \cdot (1 - \frac{x}{100}) \cdot (1 - \frac{x}{100}) = a \cdot (1 - \frac{x}{100})^2 = \frac{a \cdot (n - x)^2}{nn}$ = оставшейся суммѣ послѣ двухъ лѣтъ, которая по силѣ вопроса равна $a \times \frac{100 - x}{100}$ безъ количества b , то есть $a \times \frac{(n - x)^2}{nn} = a \times \frac{n - x}{n} - b = a \times \frac{n - x}{n} - \frac{bn}{n}$, а умножа числителя и знаменателя второй части чрезъ n , будетъ $a \times \frac{(n - x)^2}{nn} = a \times \frac{n^2 - nx}{nn} - \frac{bn}{nn}$; по раздѣленіи же на a , и уничтоживъ знаменателей, выйдетъ $(n - x)^2 = n^2 - nx - \frac{bn}{a}$, или $n^2 - 2nx + x^2 = n^2 - nx - \frac{bn}{a}$, въ которомъ переставя величины изъ одной части въ другую, будетъ $x^2 - nx = -\frac{bn}{a}$, откуда найдется $x = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{nn}{4} - \frac{bn}{a}\right)} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4b}{a}\right) \frac{n^2}{4}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n \pm \frac{n}{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{4b}{a}} = \frac{n \pm \frac{n}{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{16a}{25a}} = \frac{n \pm \frac{n}{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\
 &= \frac{n \pm \frac{n}{2}}{2} \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{n}{2} \pm \frac{n}{2} \cdot \frac{3}{5}, \text{ то есть } x = 50 \pm 50 \times \frac{3}{5} = \\
 &50 \pm 30 = 80, \text{ или } x = 50 - 30 = 20. *) \text{ Если бы по-} \\
 &\text{ложено было } b = \frac{a}{3}, \text{ то бы сей вопросъ былъ не возмож-} \\
 &\text{ной, поелику въ семъ случаѣ выйдетъ } x = 50 \pm \\
 &50 \sqrt{-\frac{1}{3}} \text{ количество мнимое.}
 \end{aligned}$$

Задача XXVIII Одинъ изъ двухъ человекъ перешелъ въ 3 часа 15 верстѣ, а другой въ пять часовъ 30 верстѣ; спрашив. котораго скорость больше.

Рѣшен. Положимъ, скорость перваго x , втораго y . Но поелику въ механикѣ доказывается, что въ уравненномъ движеніи перейденныя пространства въ сложномъ содержаніи скоростей и временъ; по сей причинѣ будетъ $15 : 30 = 3x : 5y$, или по раздѣленіи предъидущихъ членовъ на 3, а послѣдующихъ на 5, будетъ $x : y = 5 : 6$, то есть скорость перваго къ скорости втораго какъ 5 къ 6; изъ сего видно, что скорость втораго въ одинъ часъ одною верстою больше перваго. Тоже самое можно рѣшить и другимъ образомъ: поелику въ механикѣжѣ доказывается, что скорости въ сложномъ содержаніи изъ пря-

маго

*) По второму рѣшенію останется послѣ перваго года 80000 рубл. и 64000 рубл. послѣ втораго года, и при томъ $80000 - 16000 \text{ рубл.} = 80000 - \frac{4a}{25}$. По первому рѣшенію останется послѣ перваго года 20000 и $20000 - \frac{4a}{25} = 4000$ послѣ втораго года.

мага содержанія перейденныхъ пространствъ и обратнаго временъ, по сему $x : y = 15 \times 5 : 30 \times 3 = 75 : 90$, а по раздѣленіи членовъ втораго содержанія на 15, будетъ $x : y = 5 : 6$.

Прибавлен. Посредствомъ сего правила познается содержаніе движимыхъ планетъ кругомъ солнца (пріемля ихъ движеніе уравненнымъ) слѣдующимъ образомъ: положимъ, что скорости одной какой нибудь планеты движущейся около солнца $= V$, разстояніе ея отъ солнца $= D$, періодическое время возвращенія T *); другой планеты скорости v , разстояніе ея d , періодическое время t ; то по предъидущей задачѣ будетъ $VT : vt = D : d$, поскольку радіусы содержатся между собою какъ скор. жности круговъ (Курсъ Матем. часть II. § 248.), а по раздѣленіи предъидущихъ членовъ на V , а послѣ-

дующихъ на v , будетъ $T : t = \frac{D}{V} : \frac{d}{v}$, или по раздѣле-

ніи помнанныхъ членовъ на T и t будетъ $V : v = \frac{D}{T} : \frac{d}{t}$.

Возвысь члены сихъ пропорцій во вторую степень, бу-

детъ $V^2 : v^2 = \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$ и $T^2 : t^2 = \frac{D^2}{V^2} : \frac{d^2}{v^2}$; но по свойству,

доказанному Г. Кеплеромъ, квадраты періодическихъ временъ содержащаго между собою, какъ кубы изъ разстояній планетъ отъ солнца, по сему $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$; и такъ для равенства содержаній будетъ $D^3 : d^3$

$= \frac{D^2}{V^2} : \frac{d^2}{v^2}$, а по раздѣленіи предъидущихъ членовъ

на D^2 , а послѣдующихъ на d^2 , будетъ $D : d = \frac{1}{V^2} : \frac{1}{v^2}$

$= v^2 : V^2$ (§ 151), по сему $V^2 : v^2 = d : D$; естлижъ извлечешь изъ каждаго члена квадратной корень, то будетъ $V : v = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, то есть скорости двухъ планетъ въ обратномъ содержаніи квадратныхъ корней изъ ихъ разстояній.

Р 2

За-

*) Періодическое время возвращенія планеты есть то, въ которое она опять возвращается въ то же положеніе въ разсужденіи земли, отъ котораго записано начало ея движенія.

Задача XXIX. Найти число, которое ежели придастся къ 15, 27 и 45, то бы вышла непрерывная Геометрическая пропорція.

Рѣшен. Положимъ искомое число x , то произойдетъ слѣдующая пропорція: $\div 15 + x : 27 + x :: 45 + x$, при чемъ произведеніе крайнихъ членовъ равно квадрату средняго члена, то есть $(15 + x) \times (45 + x) = (27 + x)^2$ или $x^2 + 60x + 675 = x^2 + 54x + 729$, въ коемъ найдемся $x = 9$. И такъ произойдетъ непрерывная пропорція слѣдующая: $\div 24 : 36 : 54$.

Задача XXX. Непрерывной Геометрической пропорціи известна сумма крайнихъ членовъ $= a$, средній членъ $= b$, найти первой и послѣдній члены.

Рѣшен. Положимъ первой членъ x , отъ чего произойдетъ слѣдующая пропорція: $\div x : b :: a - x$, при чемъ $b^2 = ax - x^2$, или переставя члены изъ одной части въ другую, будетъ $x^2 - ax = -b^2$, откуда найдемся $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$. Пусть будетъ $a = 10$, $b = 4$, то будетъ первой членъ $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} = 5 \pm \sqrt{(25 - 16)} = 5 \pm 3 = 8$, а послѣдній $a - x = 10 - 8 = 2$, и отъ сего произойдетъ слѣдующая пропорція: $\div 8 : 4 : 2$.

Задача XXXI. Данъ знаменатель b , число членовъ n , и сумма прогрессіи S , найти первой и послѣдній членъ.

Рѣшен. Положимъ, первой членъ x , послѣдній членъ y будетъ $= xb^{n-1}$ (§ 161. слѣд. III), а сумма прогрессіи $S = \frac{xb^n - x}{b - 1}$ или $S.(b - 1) = xb^n - x$, а по раздѣленіи обѣихъ частей уравненія на $b^n - 1$ будетъ $x = \frac{S \times (b - 1)}{b^n - 1}$; послѣдній же членъ $y = \frac{S \times (b - 1)}{b^n - 1} \times b^{n-1}$. Пусть $b = 3$, $n = 5$, и $S = 242$; то будетъ $x = \frac{S \times (b - 1)}{b^n - 1} = \frac{242 \times 2}{243 - 1} = 2$, а послѣдній членъ $y = x b^{n-1} = 2.81 = 162$.

Задача XXXII. Известенъ первой членъ a , и разность второго члена съ третьимъ $=b$; найти второй и третій членъ непрерывной Геометрической пропорціи.

Рѣшен. Положимъ, второй членъ x , третій будетъ $x+b$; по сей причинѣ произойдетъ слѣдующая пропорція: $a : x :: x : x+b$, при чемъ $x^2 = ax + ab$, въ коемъ пересчитавъ члены, будетъ $x^2 - ax = ab$; откуда найдется $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(ab + \frac{1}{4}a^2)}$ — второму члену, а третій будетъ $= \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(ab + \frac{1}{4}a^2)} + b$. Пусть будетъ $a=4$, $b=8$, то выйдетъ $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(ab + \frac{1}{4}a^2)} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{(32 + 4)} = 2 \pm \sqrt{36} = 2 + 6 = 8$, третій $x+b = 8+8=16$.

Задача XXXIII. Кавалерійской Офицеръ продаетъ коня такимъ образомъ: за первой подковной гвоздь проситъ одну полушку, за второй 2, за третій 4 и такъ долѣ въ прогрессіи Геометрической, гвоздей же было 24; найти цѣну коня.

Рѣшен. Положимъ, первой членъ $=a$, знаменатель прогрессіи $=b$, число членовъ $24=c$, сумма прогрессіи x ; то послѣдній членъ прогрессіи будетъ ab^{c-1} , по сему $x = ab^{c-1} - a(\Phi) = 21.(2)^{23}1 = (2)^{24}1 = 41943$ рубл. $3\frac{3}{4}$ коп. — цѣнѣ коня.

Задача XXXIV. Найти четыре числа въ прогрессіи Геометрической, изъ коихъ бы сумма крайнихъ была $=a$, а сумма среднихъ $=b$.

Рѣшен. Положимъ, второй членъ прогрессіи x , третій y , то первой будетъ $=\frac{x^2}{y}$, а четвертой $\frac{y^2}{x}$ (§ 160. прибавл. I); отъ чего произойдетъ слѣдующая

Р 3

про

прогрессія: $\div \frac{x^2}{y} : x = y : \frac{y^2}{x}$, при чемъ сумма крайнихъ

$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = a$, а сумма среднихъ $x + y = b$, или $x = b - y$.

Изъ перваго уравненія по умноженіи обѣихъ частей чрезъ x и y , будетъ $x^3 + y^3 = axy$. Возвысь каждую часть втораго уравненія $x = b - y$ въ третью степень, будетъ $x^3 = b^3 - 3b^2y + 3by^2 - y^3$; поставь сѣю величину въ первомъ уравненіи вмѣсто x^3 , а вмѣсто axy напечатай $ay(b - y)$, будетъ $b^3 - 3b^2y + 3by^2 - y^3 + y^3 = ay(b - y)$, или $b^3 - 3b^2y + 3by^2 = aby - ay^2$, къ коему переставя члены, выйдетъ $3by^2 + ay^2 - 3b^2y - aby = -b^3$, или $(y^2 - by)x(3b + a) = -b^3$, а по раздѣленіи на $3b + a$, будетъ $y^2 - by = \frac{-b^3b}{3b + a}$.

откуда найдется $y = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{bbb}{3b + a}\right)}$. Положимъ,

что $a = 27$, $b = 18$, то будетъ $y = \frac{18}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{324}{4} - \frac{5932}{54 + 27}\right)}$

$= 9 \pm \sqrt{(81 - 71)} = 9 \pm 3 = 12 =$ третьему члену; а второ-

рой $x = b - y = 18 - 12 = 6$, по сему первой $\frac{x^2}{y} = \frac{36}{12} = 3$, а

четвертой $\frac{y^2}{x} = \frac{144}{6} = 24$; и такъ будетъ прогрессія:

$\div 3 : 6 : 12 : 24$.

Задача XXXV. Въ прогрессіи Геометрической известна сумма трехъ членовъ $= a$, и сумма ихъ квадратовъ $= b$, найти члены прогрессіи.

Рѣшен. Положимъ первой членъ x , второй y , третій будетъ $\frac{y^2}{x}$, отъ чего произойдутъ слѣдующія

уравненія: I) сумма искоемыхъ членовъ $x + y + \frac{yy}{x} = a$, или

$x^2 + xy + y^2 = ax$, II) сумма квадратовъ $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = b$,

или $x^4 + x^2y^2 + y^4 = bx^2$; переставь въ первомъ уравненіи величину xy , изъ первой части во вторую, выйдетъ $x^2 + y^2 = ax - xy = (a - y)x$; потомъ придай къ обѣимъ частямъ втораго уравненія x^2y^2

x^2y^2 , будетъ $x^4+2x^2y^2+y^4=bx^2+x^2y^2$; извлеки изъ обѣ-
ихъ частей сего уравненія квадратный корень, будетъ
 $x^2+y^2=\sqrt{bx^2+x^2y^2}=\sqrt{(b+y^2)x^2}$; но $x^2+y^2=(a-y)x$
(Е), по сему $(a-y)x=\sqrt{(b+y^2)x^2}$; возвысь каждую
часть сего уравненія во вторую степень, будетъ
 $(a-y)^2x^2=(b+y^2)x^2$, а по раздѣленіи на x^2 выйдетъ
 $(a-y)^2=b+y^2$, то есть $a^2-2ay+y^2=b+y^2$, въ коемъ
переснавая члены, будетъ $a^2-b=2ay$, а по раздѣленія на
2а найдемъ $y=\frac{aa-b}{2a}$. Поставь $\frac{aa-b}{2a}$ въ уравненіи (Е)

имѣсто у, будетъ $x^2+(\frac{aa-b}{2a})^2=(a-\frac{aa-b}{2a})x=(\frac{aa+b}{2a})x$,

апереснавая члены, выйдетъ, $x^2-(\frac{aa+b}{2a})x=-(\frac{aa-b}{2a})^2$;

откуда найдемъ $x=\frac{aa+b}{4a}+\sqrt{(\frac{aa+b}{4a})^2-(\frac{aa-b}{2a})^2}$. На-

конецъ по извѣстнымъ двумъ первымъ членамъ сы-
щется и третій членъ непрерывной Геометрической про-
порціи.

§ 177. Правило фальшивое въ Арифметикѣ
одного положенія основано на слѣдующемъ: еже-
ли отъ количесва x произойдетъ уравненіе
 $mx=r$ *), также и изъ другаго произвольно
взятаго количества a (что называется поло-
женіемъ) произойдетъ $ma=A$, то будетъ
 $A:a=r:x$; ибо $r:x=m:1$ и $A:a=m:1$
(§ 147. слѣд. II.); по сему и $A:a=r:x$. И
такъ, на примѣръ, требуется найти такое чи-
сло, котораго бы половина, четверть и пя-
тая часть составляли число 456. Положимъ
искомое число x , число по примѣру взятое,
 $20=a$, котораго $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}a=\frac{20}{2}+\frac{20}{4}+\frac{20}{5}=19=A$,
и $456=r$, отъ чего произойдетъ слѣдующая
пропорція: $A:a=r:x$; или $19:20=456:x=480$,

Р 4 то

*) Здѣсь вмѣсто m всякое число положишь можно.

по есть сумма частей 19 по примѣру положеннаго числа къ цѣлому положенію 20, какъ данная сумма частей искомаго числа 456 къ искомому x . Тожѣ должно разумѣть и о другихъ вопросахъ.

§ 178. Правило фальшивое двухъ положеній основаніе свое имѣетъ на слѣдующемъ: ежели изъ количества x произошло уравненіе $nx + d = p$, и изъ другихъ двухъ a и b тѣмъ же образомъ произведены уравненія $na \pm d = A$ и $nb \pm d = B$. И такъ естли положимъ, $p - A = E$ и $p - B = C$, то будетъ $E : C = x - a : x - b$; ибо $p - A = nx + d - na - d = nx - na = (x - a)n = E$, также и $p - B = nx + d - nb - d = nx - nb = (x - b)n = C$; изъ чего въ разсужденіи равенства количествъ произойдетъ слѣдующая пропорція: $E : C = (x - a)n : (x - b)n = x - a : x - b$ (по раздѣленіи на n); при чемъ $E = p - A = Cx - aC$ (§ 146), откуда найдется $x = \frac{p - aC}{E - C}$ *). И такъ пусть на примѣрѣ:

Нѣкто нанялъ слугу на годъ съ такимъ условіемъ, чтобы дать ему 20 рубл. и пару плащя; но слуга по прошествіи 7 мѣсяцовъ получилъ только пару плащя и 3 рубли денегъ; спрашивается цѣна плащя. Положимъ по примѣру: 1) цѣна плащя 10 рубл. $= a$, и такъ слуга за годъ долженъ получить $20 + 10 = 30$, а за 7 мѣсяцовъ ему достанется $17\frac{1}{2}$ рублей (§ 160); посему долженъ онъ получить $17\frac{1}{2} - 10 =$

*) Заѣсь количества a и b суть положенія или по примѣру взятыя числа, а количества E и C погрѣшности или разности между истиннымъ количествомъ и по примѣру взятыми числами.

$= 7\frac{1}{2} = A$. Но какъ здѣсь должно быть 3 рубли $= p$, то погрѣшность сего перваго положенія будетъ $p - A = 3 - 7\frac{1}{2} = -4\frac{1}{2} = E$. II) Пусть цѣна плащя 8 рубл. $= b$, то за 12 мѣсяцовъ слуга долженъ получить $20 + 8 = 28$, а за 7 мѣсяцовъ найдется $16\frac{1}{2}$ рубля; слѣдовательно онъ долженъ былъ получить $16\frac{1}{2} - 8 = 8\frac{1}{2} = B$, погрѣшность будетъ $p - B = 3 - 8\frac{1}{2} = -5\frac{1}{2} = C$; по сей причинѣ $x = \frac{Eb - aC}{E - C} = \frac{-4\frac{1}{2} \times 8 + 5\frac{1}{2} \times 10}{-4\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}} = 17\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 20\frac{1}{2} = 20$ рубл. 80 коп. Изъ сего видно, что произведение изъ перваго положенія и второй погрѣшности безъ произведенія изъ втораго положенія на первую погрѣшность, раздѣленное на разность погрѣшностей, равно искомой цѣнѣ плащя. И такъ рѣшеніе сего вопроса точно такоежъ, какое предлагается въ Ариѳметикѣ (§ 282), коему выведенное здѣсь буквами правило служить основаніемъ.

О логарифмахъ.

§ 179. **Опредѣленіе.** Ежели показатели прогрессіи Геометрической составляютъ прогрессію Ариѳметическую, какъ на примѣрѣ: $a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5$ и проч - - - a^n (A), то показатели сей прогрессіи, какъ-то $0, 1, 2, 3, 4, 5$, и проч - - - n (B) называющіяся логарифмами, членовъ прогрессіи Геометрической, то есть члены прогрессіи B суть логарифмы соотвѣтствующихъ членовъ прогрессіи A.

Слѣст. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, что число 3 есть логарифмъ количества a^3 ,

также n есть логарифмъ количества a^n , и о
 есть логарифмъ количества a^0 , которое $= 1$
 (6 27). Изъ чего заключить можно, что логарифмъ
 какого нибудь числа есть показатель степени,
 до которой возвышается ея корень a . И
 такъ когда $a^n = b$, то логарифмъ количества
 a^n или b будетъ $= n$; *) по сей причинѣ $a^n =$
 $a^{Lb} = b$; поселику вмѣсто n можно поставить
 Lb .

Слѣдст. II. Изъ прогрессіи A и B легко
 усмотрѣть можно, первое, что логарифмъ про-
 изведенія двухъ какихъ нибудь количествъ ра-
 венъ суммѣ ихъ логарифмовъ, на примѣръ: ло-
 гарифмъ произведенія изъ a^2 и a^3 будетъ $= a^5$
 $= a^{2+3}$, то есть сумма логарифмовъ множимаго
 и множителя равна логарифму произведенія, какъ-
 то $La^5 = La^2 + La^3$. И вообще логарифмъ про-
 изведенія двухъ количествъ $a^n \times a^r = a^{n+r} = La^n$
 $+ La^r$, то есть La^{n+r} есть $n + r$; или поло-
 жимъ, что $a^n = c$ и $a^r = b$, то $Lc = n$ и Lb
 $= r$, но $a^n \times a^r = a^{n+r} = bc$, посему $Lbc =$
 $La^{n+r} = n + r$. Изъ сего явствуетъ, что вмѣ-
 сто умноженія двухъ чиселъ одного чрезъ дру-
 гое, надлежитъ только сложить ихъ логариф-
 мы, коихъ сумма покажетъ ихъ произведеніе.

Слѣдст. III. Изъ тогожъ видно, что логарифмъ
 частнаго равенъ разности логарифмовъ дѣ-
 лимаго и дѣлителя, на примѣръ: ежели a^5
 раздѣлить чрезъ a^3 , то логарифмъ 5 безъ ло-
 га-

*) Логарифмъ какого нибудь числа для краткости означа-
 ется такимъ образомъ: $Lb = n$, и выговаривается
 Логарифмъ количества $b = n$.

гарифма $3 = 2$ будетъ логарифмъ частнаго ;
 ибо $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$, то есть $La^5 - La^3 = La^2 =$
 $5-3 = 2$: и вообще пусть будетъ дѣлимое
 количество $a^n = c$, дѣлитель $a^r = e$, то ча-
 стное $\frac{a^n}{a^r} = a^{n-r} = \frac{c}{e}$: но $Lc = La^n = n$, $Le = a^r$
 $= r$, по сему $L\frac{a^n}{a^r} = L\frac{c}{e} = n - r$, то есть Lc
 $- Le = L\frac{c}{e}$.

Слѣдств. IV. Изъ тогожъ уразумѣнь можно,
 что логарифмъ какой нибудь степени равенъ ло-
 гарифму корня, умноженному на показателя, на
 примѣръ: $(aaa)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$, то есть $L(a^3)^2 =$
 $= La^{3 \times 2} = 3 \times 2 = 2.La^3$: и вообще положимъ,
 $a^3 = a^n = c$, то будетъ $(a^n)^2 = a^{n \times 2} = a^{2n} =$
 $c.c$, то есть $L(a^n)^2 = La^{2n} = Lc.c = 2n = 2.Lc$;
 также докажется, что и $Lc^3 = 3.Lc$; Lc^4
 $= 4.Lc$; и вообще $Lc^n = n.Lc$; и обратно, ло-
 гарифмъ какого нибудь корня равенъ логарифму
 степени, раздѣленному на кореннаго показателя,
 на примѣръ: $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$ то есть $L\sqrt{a^6} = La^{\frac{6}{2}}$
 $= \frac{6}{2} = 3 = \frac{1}{2}.La^6$. И такъ естли положимъ $n = \frac{1}{2}$,
 то будетъ $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, то есть $La^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{a}$
 $= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.La^1$; естлижъ $n = \frac{1}{3}$, то $La^{\frac{1}{3}} = L\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$
 $= \frac{1}{3}.La$; также $La^{\frac{1}{4}} = L\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}.La$, и вообще
 $L\sqrt[n]{a} = La^{\frac{1}{n}} = \frac{La}{n}$.

Прибавлен. I. Ежели положимъ, $n = -1$,
 то будетъ $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$ (§ 53); по сему La^{-1}

$=L\frac{1}{a}=-1$. Когда $n=-2$, то будетъ $a^n=a^{-2}$
 $=\frac{1}{a^2}$, слѣдовательно $L a^{-2}=L\frac{1}{a^2}=-2$; также
 $L\frac{1}{a^3}=-3$ и прочая. Изъ сего явствуетъ, что
 логарифмы дробей суть числа отрицательныя,
 или невозможныя, относящіяся къ мнимымъ
 числамъ.

Прибавлен. II. Ежели въ предложенной §
 179 го прогрессіи Геометрической положимъ
 $a=2$ или 3, 4, 5 и проч n , тогда тѣхъ же
 логарифмовъ произойдутъ различныя числа,
 какъ-то:

$2^0:2^1:2^2:2^3:2^4$ и проч.	} по при всѣхъ сихъ разныхъ числахъ, логарифмы будутъ одинаки, какъ-то о, 1, 2, 3, 4, 5 и прочая.
$3^0:3^1:3^2:3^3:3^4:3^5$ - -	
$4^0:4^1:4^2:4^3:4^4:4^5$ - -	
$5^0:5^1:5^2:5^3:5^4:5^5$ - -	
$n^0:n^1:n^2:n^3:n^4:n^5$	

Слѣдовательно сколько поставлено будетъ
 различныхъ прогрессій, столькожъ разныхъ си-
 стемъ логарифмовъ сочинено быть можетъ. Во
 всякой системѣ постоянное число a зовется
 основаніемъ логарифмическимъ, которое нико-
 гда не можетъ быть равно единицѣ; поелику
 когда буква $a=1$, то всѣ ея степени a^2, a^3 и
 a^n будутъ $=1$ цѣ, и никакому другому дан-
 ному числу равны быть не могутъ.

§ 180. Положен. Въ употребительныхъ таб-
 лицахъ логарифмовъ взято за основаніе, что
 корень $a=10$, отъ чего произошла десятирнаго
 содержанія слѣдующая Геометрическая прогрес-
 сія

сія: $\frac{1}{10} : 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5$ и проч: 10^n , то есть прогрессія $\frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000$: и проч. представляющѣ числа, коихъ логарифмы суть 0, 1, 2, 3, 4, 5, и прочая.

Слѣдств. I. Изъ сего видно, что логарифмъ 1 цы всегда будетъ $= 0$ (поелику $10^0 = 1$. § 27), $L_{10} = 1$, $L_{100} = 2$, $L_{1000} = 3$, $L_{10000} = 4$, $L_{100000} = 5$ и проч.; $L_{\frac{1}{10}} = -1$, $L_{\frac{1}{100}} = -2$, $L_{\frac{1}{1000}} = -3$, $L_{\frac{1}{10000}} = -4$ и прочая. И такъ когда логарифмъ 1 цы $= 0$, $L_{10} = 1$, $L_{100} = 2$, $L_{1000} = 3$ и прочая: то логарифмы чиселъ, между 1 цю и 10 заключающихся, должны быть больше 0, а меньше 1, то есть дроби; такъ же логарифмы чиселъ, между 10 и 100 находящихся, будутъ больше, нежели 1 ца, но меньше 2 хъ, то есть единица съ дробью; равнымъ образомъ логарифмы чиселъ, между 100 и 1000 содержащихся, будутъ больше 2 хъ, а меньше 3 хъ, то есть два съ десятичною дробью. Во всѣхъ логарифмахъ цѣлое число именуется показателемъ логарифма, а десятичная дробь зовется прибавокъ *).

Слѣдствіе II. Изъ сего уразумѣть можно, что показатель логарифма всегда единицею меньше, чѣмъ знакъ со-поставляющаго ему числа, то есть, когда число знаковъ, изображающихъ какую либо величину, будетъ $= n$, то въ показателѣ логарифма число цѣлыхъ единицъ будетъ $n-1$, на примѣръ: числа 27983 между 10000 и 100000 заключающагося, (которое состоитъ изъ 5 знаковъ)

*) Употребительныя таблицы логарифмовъ, на Россійскомъ языкѣ печатанныя, содержатъ въ себѣ логарифмы всѣхъ чиселъ отъ 1 до 10000; а на Французскомъ нѣкоторыя заключающіе въ себѣ логарифмы чиселъ отъ 1 до 20000, а иныя отъ 1 до 100000, и называются таблицы Улакова (имя трудившагося въ сочиненіи оныхъ).

ковъ) соотносѣвающій показателъ логарифма есть 4; и обратно когда показателъ логарифма 8, то соотносѣвающее ему число состоитъ изъ 9 знаковъ. Сего свойства никакая другая система имѣть не можетъ, по сему причина и выбрано за основаніе $a=10$.

Слѣствие III. Изъ сего удобно можно видѣть, когда будешь имѣть такіа таблицы въ которыхъ для всѣхъ чиселъ вычислены логарифмы, то помѣщая оныя легко самыя труднѣйшія вычисленія дѣлать можно, какъ только умноженіе или дѣленіе, также возвышеніе степеней и извлеченіе корней случаются; посему въ помѣстныхъ таблицахъ, какъ для каждого числа логарифмъ, такъ и для всякаго логарифма самое число найтти можно.

§ 181. **Задача. I.** Найти логарифмъ какого нибудь числа, и показать способъ, какъ находить логарифмы для всѣхъ обыкновенныхъ чиселъ.

Рѣшеніе. Положимъ, что требуется найти логарифмъ числа 9 пи, которой означимъ буквою x , то есть $L9=x$; но посему извѣстно, что x будетъ больше 0, а меньше 1 цы, то есть требуемой логарифмъ долженъ быть такое число, чтобы 10^x точно было $= 9$ пи; но какъ число 9 есть самое большое изъ чиселъ между, 1 и 10 заключающихся, то изъ сего легко уразумѣть можно, что логарифмъ онаго x долженъ быть такая дробь, которая не много меньше 1 цы; изъ сего видно, что x

будетъ больше, нежели $\frac{1}{5}$, то есть $10^{\frac{1}{5}}$ меньше 9 пи; ибо возвыся оба сіи количества въ пятую степень, найдетъся пятая степень изъ

$10^{\frac{1}{5}}=10^1=10000$, которая пятой степени отъ числа 9 пи равна быть должна; но пятая степень

числа 9 пи $= 59049$ больше 10000, по сему $10^{\frac{1}{5}}$
меньше

меньше, нежели 9; следовательно $\frac{4}{5}$ меньше, нежели $L9$, то есть логарифмъ числа 9 долженъ быть больше, нежели $\frac{4}{5}$. Пусть такая дробь

будетъ $\frac{9}{10}$: то должно быть $10^{\frac{9}{10}} = 9$, то есть десятой степени какъ одной, такъ и другой величины, надлежитъ быть равнымъ между собою;

но 10 я степень изъ $10^{\frac{9}{10}} = 10^9 = 1000000000$, а десятая степень числа 9 пи $= 3486784401$; изъ чего видно, что $\frac{9}{10}$ еще малы, то есть $L9$ больше, нежели $\frac{9}{10}$; также найдется, что

$L9$ больше, нежели $\frac{19}{20}$, то есть $10^{\frac{19}{20}} < 9$, однакожь меньше, нежели $\frac{11}{12}$; изъ чего разумѣть можно, что показатель числа 10 пи есть такая дробь, для изслѣдованія которой между помянутыми дробями еще среднія Арифметическія искапъ надлежитъ, дабы степень сего показателя отъ числа 10 пи точно была $= 9$ пи. Но дабы избѣгнуть помянутого труда, то придавъ къ 1 цѣ и 10, также и къ логарифмамъ ихъ 0 и 1 по семи нулей, для десятичныхъ дробей, сыскивай между числами среднее Геометрическое соразмѣрное число (§ 160), а между логарифмами ихъ среднее Арифметическое (§ 139); потомъ между найденнымъ среднимъ Геометрическимъ и большимъ числомъ 10, сыщи среднее Геометрическое соразмѣрное число, а между логарифмами ихъ среднее Арифметическое, и такъ продолжая далѣе, надлежитъ вмѣщать между большимъ и меньшимъ ближайшимъ найденнымъ числомъ къ 9 пи новыя числа, и ко всякому найденному такимъ образомъ

зомъ числу находишь соотвѣствующій логарифмъ до тѣхъ поръ, пока среднее Геометрическое число будетъ требуемое число 9 съ семью нулями, слѣдовательно и величина его логарифма найдена быть можетъ точно такимъ образомъ, какъ въ § 40 мѣ III й части показано, и изъ приложеннаго здѣсь краткаго примѣра видѣть можно :

числа	логарифмы
$A = 1.0000000$	$0.0000000 = a$
$B = 10.0000000$	$1.0000000 = b$
среднія Геометрич.	среднія Арифметич.
$\sqrt{A.B} = D$	$\frac{a+b}{2} = d$
$\sqrt{B.D} = C$	$\frac{b+d}{2} = c$
$\sqrt{B.C} = E$	$\frac{b+c}{2} = e$
$\sqrt{B.E} = F$	$\frac{b+e}{2} = f$
$\sqrt{B.F} = G$	$\frac{b+f}{2} = g$
$\sqrt{G.F} = H$	$\frac{g+f}{2} = h$

и такъ продолжая далѣе до 26 го дѣйствія, наконецъ найдемся $\sqrt{Y.Z} = 9.0000000$, а логарифмъ онаго $\frac{y+z}{2} = 0.9542425$.

По учиненіи сего положимъ, $L_9 = x$. И такъ когда L_9 намъ извѣстенъ, то логарифмъ числа 3 хъ, которое есть квадраиноу корень отъ 9, будетъ $= \frac{1}{2}x$ (§ 179 слѣдств. IV.); попомъ по извѣстному логарифму числа 3 хъ и логарифму единицы найдемся логарифмъ числа 2 хъ также,

также какъ и логарифмъ числа 9 пи. Теперь положимъ, что $L_2 = y$, а $L_3 = z$, то опѣ сего легко найдутся логарифмы другихъ многихъ чиселъ; поелику когда $L_2 = y$, а $L_{10} = 1$, то будетъ $L_6 = L_2 + L_3 = y + z$; также $L_{20} = 1 + y$, $L_{200} = 2 + y$, $L_{2000} = 3 + y$, $L_{20000} = 4 + y$ и проч. равнымъ образомъ $L_{30} = 1 + z$, $L_{300} = 2 + z$, $L_{3000} = 3 + z$ и прочая; а $L_{90} = 1 + x$, $L_{900} = 2 + x$, $L_{9000} = 3 + x$ и прочая; также $L_{60} = 1 + y + z$, $L_{600} = 2 + y + z$, $L_{6000} = 3 + y + z$ и такъ далѣе; ибо логарифмъ произведенія равенъ суммѣ логарифмовъ множимыхъ чиселъ.

Когда извѣстно, что $L_c^2 = 2.L_c$, $L_c^3 = 3.L_c$, $L_c^4 = 4.L_c$ и проч., то будетъ $L_4 = 2y$, $L_8 = 3y$, $L_{16} = 4y$, $L_{32} = 5y$, $L_{64} = 6y$ и проч. а изъ сихъ сыщется $L_{40} = 1 + 2y$, $L_{400} = 2 + 2y$, $L_{4000} = 3 + 2y$ и проч. $L_{80} = 1 + 3y$, $L_{800} = 2 + 3y$ и проч. $L_{160} = 1 + 4y$, $L_{1600} = 2 + 4y$, $L_{16000} = 3 + 4y$ и проч. также $L_{3 \times 3 \times 3} = L_{27} = 3z$, $L_{81} = 4z$, $L_{243} = 5z$, $L_{729} = 6z$, откуда найдется $L_{270} = 1 + 3z$, $L_{2700} = 2 + 3z$, $L_{27000} = 3 + 3z$ и проч. $L_{810} = 1 + 4z$, $L_{8100} = 2 + 4z$, $L_{81000} = 3 + 4z$ и проч. $L_{2430} = 1 + 5z$, $L_{24300} = 2 + 5z$ и прочая.

Поелику найдено, что $L_e^c = L_c - L_e$, то положимъ, $c = 10$, $e = 2$; но когда $L_{10} = 1$, $L_2 = y$, то будетъ $L_{\frac{1}{2}} = L_5 = 1 - y$; а изъ сего $L_{50} = 2 - y$, $L_{500} = 3 - y$, $L_{5000} = 4 - y$ и проч.; потомъ $L_{25} = 2.(1 - y) = 2 - 2y$, $L_{125} = 3 - 3y$. $L_{625} = 4 - 4y$; а изъ сихъ сыщется $L_{250} = 3 - 2y$, $L_{2500} = 4 - 2y$, $L_{25000} = 5 - 2y$ и проч.

С

также

также $L1250=4-3y$, $L12500=5-3y$ и проч. еще же $L6250=5-4y$ и прочая.

Равнымъ образомъ, когда логарифмы чиселъ 2, 3, 4, 5 и 6 намъ извѣстны, то чрезъ оныя легко найти можно логарифмы и другихъ безконечно многихъ чиселъ, какъ-то: $L12=2+2y$, $L15=1+2-y$, $L18=y+2z$, $L24=2+3y$, $L48=2+4y$, $L96=2+5y$, $L192=2+6y$ и проч.; $L45=1+2z-y$, $L135=1+3z-y$, $L405=1+4z-y$ и проч. $L54=y+3z$, $L72=x+3y$, $L144=x+4y$ и проч. такожде $L120=1+2+2y$, $L1200=2+2+2y$ и проч. $L150=2+2-y$, $L1500=3+2-y$ и проч. $L180=1+y+2z$, $L1800=2+y+2z$ и проч. $L240=1+2+3y$, $L2400=2+2+3y$ и проч. $L480=1+2+4y$, $L4800=2+2+4y$ и прочая.

Наконецъ найдя логарифмы чиселъ 7, 11, 13, 17, и проч. также какъ и логарифмъ числа 9 ши, можно чрезъ одно только сложение находить логарифмы многихъ другихъ чиселъ, какъ на примѣръ числа 210, состоящаго изъ слѣдующихъ множителей 2.3.5.7, будетъ логарифмъ $=L2+L3+L5+L7$; равнымъ образомъ, когда число $360=2.2.2.3.3.5=2^3.3^2.5$, то будетъ $L360=3.L2+2.L3+L5$. Изъ сего явствуетъ, какимъ образомъ изъ логарифмовъ такъ называемыхъ первыхъ чиселъ *) логарифмы всѣхъ другихъ безъ дальняго труда найти можно. И такъ при сочиненіи логарифмическихъ таблицъ,

*) Первымъ числомъ называется то, въ которомъ никакихъ множителей, кромѣ самаго себя, не заключается, какъ-то 7, 11, 23, 113 и прочая.

блицѣ, о томѣ только спараться должно, чтобы найдены были сколько можно совершеннѣе логарифмы первыхъ чиселъ, посредствомъ коихъ сочинены бытъ могутъ требуемыя таблицы.

Слѣдствіе. Изъ сего рѣшенія и свойства логарифмовъ удобно разумѣть можно, что одинъ логарифмъ, перемѣняя только его показателя, многимъ числамъ служить можетъ, на примѣръ: положимъ логарифмъ числа $3786 = 3 + u$, то будетъ $L_{\frac{3786}{10}} = L378.6' = 2 + u$, $L_{\frac{3786}{100}} = L38.86'' = 1 + u$, $L_{\frac{3786}{1000}} = L3.786''' = 0 + u$, $Lo.3786^{IV} = -1 + u$, $Lo.03786^V = -2 + u$, $Lo.003786^{VI} = -3 + u$ и проч. и обратно $L37860 = 4 + u$, $L378600 = 5 + u$ и прочая.

§ 182. *Задача. II.* Данному логарифму 7.9281397, котораго показатель больше всякаго показателя, въ таблицахъ находящагося, найти соотвѣствующее число.

Рѣшен. I. Прежде всего изъ показателя 7 вычти логарифмъ 10000, то есть 4; дабы оставшійся логарифмъ былъ меньше самаго послѣдняго показателя, въ таблицахъ находящагося; потомъ къ остатку 3.9281397 прииди въ таблицахъ соотвѣствующее число, которое будетъ 8475; умножь найденное число чрезъ 10000, то произведение 84750000 будетъ искомымъ числомъ, соотвѣствующее данному логарифму 7.9281397.

II. Еслии данному логарифму, на примѣръ: 7.8281753 подлиннаго въ таблицахъ не найдется, какъ-то въ первомъ рѣшеніи показано;

по для сысканія соотвѣствующаго числа сему логарифму вычпи 4 изъ показателя 7, найдется въ таблицахъ, что остатокъ логарифма 3.8281753 будетъ заключаться между логарифмами чиселъ 6732 и 6733, то есть больше логарифма числа 6732, а меньше 6733; изъ чего заключить можно, что къ числу 6732 принадлежитъ еще нѣкопоя дроби. И такъ для сысканія сей дроби вычпи изъ логарифма большаго ближайшаго числа 6733, и изъ даннаго логарифма логарифмъ меньшаго ближайшаго числа 6732; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ разность логарифмовъ большаго и меньшаго ближайшаго чиселъ 645 содержится къ разности оныхъ чиселъ, то есть къ 1 цѣ, такъ разность меньшаго ближайшаго съ даннымъ 312 къ искомой дроби; то есть $645:1=312:x=\frac{312}{645}=\frac{104}{215}^*)$; найденную такимъ образомъ дробь припиши къ меньшему ближайшему числу 6732, то соотвѣствующее число логарифму 3.8281753 будетъ $6732+\frac{104}{215}=6732\frac{104}{215}$: но какъ соотвѣствующее число данному логарифму 7.8281753 должно быть въ 10000 разъ больше найденнаго, то для сего умножь $6732\frac{104}{215}$ чрезъ 10000, а логарифмъ онаго 4 придай къ логарифму 3.8281753, чрезъ что найдется данному логарифму соотвѣствующее число 67324837.

Слѣ-

- е) Хотя полагаемая здѣсь пропорція, что разности чиселъ суть соразмѣрны разности ихъ логарифмовъ, не есть истинная; но однакожъ она въ большихъ числахъ за дѣйствительную безъ всякой погрѣшности принята быть можетъ.

Слѣдств. Ежели показатель даннаго логарифма не превосходитъ показателя, въ таблицахъ находящагося, тогда найденная показаннымъ образомъ дробь приводится въ десятичную (Часть I. § 144), и приписывается къ найденному меньшему ближайшему числу, которое вмѣстѣ съ десятичною дробью будетъ соотвѣтствовать данному логарифму.

Прибавлен. Ежели данной логарифмъ \ будетъ отрицательной, на примѣръ: -1.5327320 , котораго соотвѣтствующее число должна быть дробь; но для сысканія оной, придай къ данному логарифму логарифмъ 100000 , то есть 5 , сумма будетъ 3.4672680 ; потомъ приими въ таблицахъ къ сему логарифму меньшее ближайшее число, которое будетъ 2932 ; но какъ сіе число во 100000 разъ больше должнаго, то раздѣли оное на 100000 частей, а логарифмъ его 5 вычти изъ логарифма 3.4672680 , частное число $\frac{2932}{100000} = 0.02932^v$ будетъ искомая дробь, даннаго логарифма -1.5327320 .

§ 183. **Задача III.** Даннаго числа, которое больше 10000 , найми соотвѣтствующій логарифмъ.

Рѣшен. Положимъ, что требуется найми логарифмъ числа 3276492 . Отдѣля въ данномъ числѣ отъ лѣвой руки къ правой четыре знака (или все тоже, раздѣля данное число на 1000 частей), приими въ таблицахъ соотвѣтствующій логарифмъ отдѣленнаго числа 3276 , которой будетъ 3.5153439 ; также и логарифмъ числа, единицею превосходящаго, то есть

С 3 3277,

3277, которой $= 3.5154764$; придай къ показателямъ сихъ логарифмовъ столько единицъ, сколько въ данномъ числѣ отдѣлено съ правой руки знаковъ, отъ чего произойдутъ логарифмы 6.5153439 и 6.5154764, коихъ соотвѣствующихъ числа суть 3276000 и 3277000, а разность оныхъ есть 1000; потомъ сдѣлай тройное правило: какъ разность сихъ чиселъ 1000 содержится къ разности ихъ логарифмовъ 1325, такъ разность даннаго и меньшаго ближайшаго числа 492 къ разности ихъ логарифмовъ, то есть $1000 : 1325 = 492 : x = 651$; найденное число 651 придай къ логарифму 6.5153439 меньшаго числа 3276000, будешь имѣть искомой логарифмъ числа 3276492 $= 6.5154090$. Посредствомъ сего правила находится логарифмъ всякаго числа, въ таблицахъ превосходящаго.

§ 184. Задача IV. Къ премъ даннымъ числамъ найди посредствомъ логарифмовъ четвертое пропорціональное число.

Рѣшен. Сложи логарифмы среднихъ членовъ, вычти логарифмъ перваго члена, остатокъ будетъ логарифмъ искомаго четвертаго пропорціональнаго члена, на примѣръ: положимъ, что должно найти четвертой соразмѣрной членъ слѣдующей пропорціи: $341 : 428 = 5797 : x$, то приискавъ въ таблицахъ соответствующихъ даннымъ числамъ логарифмы, сдѣлай, какъ слѣдуютъ:

$$L_{428} = 2.6314438$$

$$L_{5797} = 3.7632033$$

$$\text{сумма} = 6.3946471$$

$$L_{341}$$

$$\text{сумма} = 6.3946471$$

$$L341 = 2.5327544$$

$$3.8618927 = Lx = 7276.$$

Къ сему логарифму найдеся въ таблицахъ соотвѣстствующее искомое число 7276. Справедливостъ сего видна изъ того, что для высканія четвертаго соразмѣрнаго числа произведение среднихъ дѣлился на крайней извѣстной членѣ.

Слѣдств. Изъ сего яствуетъ, ежели извѣстны будутъ крайніе члены и одинъ средній; то изъ суммы логарифмовъ крайнихъ членовъ, вычтя логарифмъ даннаго средняго, найдеся логарифмъ пребуемаго втораго средняго; потомъ по извѣстному логарифму, посредствомъ предписанныхъ задачъ, найдеся соотвѣстствующее число.

§ 185. *Задача V.* Изъ предложеннаго числа, найти корень какой нибудь степени.

Рѣшен. Прискавъ въ таблицѣ логарифмъ даннаго числа, раздѣли оной на кореннаго показателя, частное число будетъ логарифмъ искомаго корня, къ которому прискавъ въ таблицахъ соотвѣстствующее число, будетъ имѣть искомой корень, на примѣръ: положимъ, что пребуется корень седьмой степени изъ числа 128, то найдеся въ таблицѣ логарифмъ сего числа $= 2.1072100$, которой раздѣля на 7, частное число 0.3010300 будетъ логарифмъ искомаго корня, коему соотвѣстствующее число въ таблицахъ есть 2.

Примѣчан. I. Ежели данное число не заключаетъ въ себѣ совершеннаго корня, какъ на примѣръ 7239, изъ котораго должно найти корень пятой степени; то раздѣля соотвѣстствующій въ таблицахъ логарифмъ се-

го числа 3.8596786 на пять частей, къ частному числу 0.7719357 прииди меньшей ближайшей логарифмъ къ тѣхъ столбамъ таблицы, гдѣ показзель 3, найдется меньшей ближайшей логарифмъ 3.7718813 противъ числа 5914; но какъ число, соответствующее логарифму корня 0.7719357, должно состоятъ только изъ одного знака, того ради раздѣля 5914 на 1000, частное $5\frac{194}{1000} = 5.914''$ будетъ требуемой корень.

Примѣчан. II. Чтожъ касается до сысканія логарифмовъ простыхъ правильныхъ и смѣшанныхъ дробей, то смотри о семъ въ III части сего курса § 48 и послѣдующіе.

§ 186. **Опредѣлен.** Дополненіе Ариметическое есть разность между какимъ нибудь числомъ и единицею со столькими нулями, сколько предложенное число знаковъ въ себѣ заключаетъ.

Слѣдств. И такъ дополненіе Ариметическое числа 357 найдется, когда оное изъ 1000 вычтется.

1000
357
643

Изъ чего видно, что для сысканія его дополненія надлежитъ только вычесть первой знакъ опъ правой руки 7 изъ 10, а прочіе изъ 9 ши, или все равно, что первой знакъ 0 принимается за 10, а каждой изъ прочихъ за 9, исключая единицу опъ лѣвой руки.

Прибавлен. I. Посредствомъ сего правила можно дѣлать вычитаніе чрезъ сложеніе, на примѣръ: дабы изъ суммы двухъ чиселъ 352 и 523 вычесть сумму двухъ другихъ чиселъ 201 и 32, то написавъ два первыхъ числа, поставь подъ ними дополненія Ариметическія двухъ послѣднихъ чиселъ, опъ суммы ихъ 1742 опними

	523	
	352	
дополнен. Арием. къ 201	- -	799
дополнен. Арием. къ 32	- -	68
	1742	
	642	

единицу тысячъ и единицу сотенъ, остатокъ 642 будетъ требуемая разность чиселъ.

Примѣчан. Ежели количество, изъ котораго данное число вычесть должно, будетъ имѣть больше знаковъ, нежели вы-

вычитаемое; но дабы Ариеметическое дополненіе сего количества состояло изъ поликагожъ числа знаковъ, сколько первое имѣетъ, надлежитъ вычитаемое количество дополнить съ лѣвой руки нулями, и сыскавъ дополненіе онаго, сложить съ даннымъ числомъ; потомъ отъ суммъ ихъ отнять единицу отъ перваго знака съ лѣвой руки, будешь имѣть искомую разность, на примѣръ: положимъ, что должно вычесть 69 изъ 5382, то Ариеметическое дополненіе вычитаемаго количества 0069 будешь 9931; потомъ сложи съ числомъ съ даннымъ 5382, отъ суммъ ихъ $5382 + 9931 = 15313$ отними единицу отъ перваго знака съ лѣвой руки, то и получишь требуемую разность 5313.

Прибавен. II. Для раздѣленія числа 762 чрезъ 127 обыкновенно вычитается логарифмъ дѣлителя изъ логарифма дѣляимаго (§ 179 Слѣ. III), что самое учинить можно и посредствомъ упомянутого правила, прѣискавъ въ таблицахъ логарифмъ дѣляимаго

2.8819550	= L762
7.8961963	дополн. Ариэ. 127 0)
0.7781513	

суммы исключи единицу съ лѣвой руки, то оставшееся количество 0.7781513 будешь логарифмъ частнаго 6, которое отъ соответствующаго въ таблицахъ сему числу логарифма разниши только одною десяти-милліонною частію.

Прибавлен. III. Если должно будетъ умножить одну дробь другою дробью, то сложи вмѣстѣ логарифмы числителей съ Ариеметическими дополненіями логарифмовъ знаменателей, наблюдая при томъ, чтобы дополненія Ариеметическія знаменателей были изъ одного числа знаковъ съ логарифмами числителей (а въ противномъ случаѣ надлежитъ приписать къ меньшему числу нѣсколько нулей съ лѣвой руки); потомъ въ найденной такимъ образомъ суммѣ уничтожь двѣ единицы съ лѣвой руки, оставокъ будешь логарифмъ требуемаго произведенія дробей.

С 5

§ 187.

- *) Для сысканія Ариеметическаго дополненія къ логарифму 2.1038037 числа 127, вычти 2.1038037 изъ 10.0000000, или все то же и не отдѣля десятичныхъ дробей вычесть можно 21038037 изъ 100000000.

§ 187. Задача. VI. Даннаго логарифма 6.1389333 найти сколько можно вѣрнѣйшее число.

Рѣшен. Прѣйди въ таблицахъ къ дополненію сего логарифма 3.8610667 меньшей ближайшій логарифмъ 3.8610562, которой найдется пропущенъ числа 7262; потомъ сложи сей логарифмъ съ даннымъ, найдется въ таблицахъ, 3.8610562 = L7262 что сумма сихъ логарифмовъ, не 6.1389333 прѣмля въ разсужденіе показателя, 9.9999895 = суммѣ. соотвѣтствующему числу 9999, коего логарифмъ есть 3.9999566; но какъ показатель упомянутого логарифма есть 9, то поставя на мѣсто 3 къ показателя 9, меньшее ближайшее число логарифма 9.9999566 будетъ 9999000000, а большее ближайшее 1000000000, коего логарифмъ есть 10.0000000; и такъ вычтя какъ изъ сего, такъ и изъ логарифма 9.9999895 меньшей ближайшей логарифмъ 9.9999566, сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ разность логарифмовъ большаго и меньшаго ближайшаго 434 къ разности суммою принятаго и меньшаго ближайшаго, такъ разность чиселъ 1000000 къ соотвѣтствующему числу, то есть 434 : 329 = 1000000 : 758064. Сѣ число придай къ числу 9999000000, то сумма 9999758064 будетъ соотвѣтствующее число логарифму 9.9999895; наконецъ раздѣля найденное число 9999758064 на 7262, частное число 1376997⁵⁸⁵⁰/₇₂₆₂ будетъ исконое число даннаго логарифма.

Прибавлен. Для сысканія вѣрнѣйшаго логарифма къ данному числу надлежитъ оное доводить до того, чтобы послѣдній знакъ съ лѣвой руки былъ 8 или 9, на примѣръ: ежели данное число будетъ 1272641, то умножь оное на 7; потомъ къ произведенію 8908487 сыщи соотвѣтствующій логарифмъ, какъ въ III задачѣ показано; наконецъ къ найденному упомянутымъ образомъ логарифму 6.9498039 придай Арифметическое дополненіе 9.1549020 логарифма числа 7 ми, и опичавъ въ суммѣ ихъ единицу отъ послѣдняго знака съ лѣвой руки, остатокъ 6.1047059 будетъ вѣрнѣйшій логарифмъ даннаго числа 1272641.

Задача VII. Извѣстенъ первой членъ Геометрической прогрессіи $\div \div a : ar : ar^2$ и проч. у
ко-

$= L_{32768}$, или $x-1 = \frac{L_{32768}}{L_2}$, а придавъ къ
объёмъ частямъ 1, будетъ $x = \frac{L_{32768}}{L_2} + 1$
 $= \frac{4\ 515\ 4500}{0.3\ 710\ 300} + 1 = 15 + 1 = 16 =$ требуемому числу
ранъ.

Задача IX. Казначей ложицалъ у своего го-
сподина изъ полныхъ бочекъ вино (изъ коихъ
въ каждой было по 100 бутылокъ), дополняя
ихъ водою, такимъ образомъ: взявши первую
бутылку вина, дополнилъ водою; потомъ по-
слѣ взявъ изъ такого вина второй бутылки,
опять дополнилъ бутылкою воды, и такъ
далѣе, пока оставалось въ бочкѣ 50 бутыл-
окъ вина, смѣшаннаго съ 50 бутылками во-
ды; спраш. сколько сей хищникъ изъ каждой
бочки такимъ образомъ бутылокъ взялъ.

Рѣшен. Положимъ, $a = 100$ бутыл. $b = 1$ бутыл.
 $a = 50$ бутыл. и x требуемое число разъ взятыхъ бу-
тылокъ. Послѣ взявъ первой бутылки, то есть мѣры
 b , останется въ бочкѣ для второго раза настоящаго
вина только 99 бутылокъ $= a - b$, котораго въ мѣрѣ b
во второй разъ будетъ $99 \times \frac{1}{100} = (a - b) \frac{b}{a} = \frac{b(a - b)}{a}$; и
такъ послѣ второго взявъ бутылки останется въ
бочкѣ цѣльнаго вина $a - b - \frac{b(a - b)}{a} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} = \frac{(a - b)^2}{a}$;
въ третьей взятой бутылкѣ b будетъ вина $\frac{b}{a} \times \frac{(a - b)^2}{a}$
 $= \frac{b(a - b)^2}{a^2}$, послѣ чего останется въ бочкѣ цѣльнаго
вина только $\frac{(a - b)^2}{a} - \frac{b(a - b)^2}{a^2} = \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2} = \frac{(a - b)^3}{a^2}$
и вообще послѣ взявъ x бутылокъ, останется въ бо-
чкѣ

чкѣ количество вина $\frac{(a-b)^x}{a^{x-1}} = d$ (по разположенію).

Но какѣ количество x есть неизвѣстной показатель, то для сысканія онаго надлежитъ употребить логарифмы. И такѣ будетъ $L \frac{(a-b)^x}{a^{x-1}} = Ld$; но логарифмъ частнаго равенъ разности логарифмовъ дѣлимаго и дѣлителя, а логарифмъ всякой степени равенъ логарифму корня, умноженному показателемъ степени; по сей причинѣ $L(a-b)^x = L a^{x-1} = Ld$ или $x.L(a-b) - (x-1).La = Ld$ $= x.L(a-b) - x.La + La = Ld$, еѣ коемъ переставя члены, будетъ $La - Ld = x.La - x.L(a-b) = x[La - L(a-b)]$; откуда найдется $\frac{La - Ld}{La - L(a-b)} = x = \frac{L100 - L50}{L100 - L99}$; то есть

$\frac{2.000000 - 1.6989700}{2.000000 - 1.9916325} = \frac{0.3010300}{0.0043675} =$ почти 69 бутылокъ, то есть изъ каждой бочки взяно помянутымъ образомъ около 69 бутылокъ, изъ коихъ въ каждой осподось населяющаго вина 50 бутылокъ и 50 бутылокъ воды.

Задача X. Нѣкто отдалъ 1500 рублей въ долѣ на 15 лѣтъ съ процентомъ по 7 рублей на 100 въ годѣ, считая и на проценты проценты; спрашивается, какѣ великъ будетъ капиталъ чрезъ показанное время.

Рѣшен. Положимъ $1500 = b$, $100 = a$, $7 = d$, $15 = n$, а искомой капиталъ $= x$; то капиталъ послѣ перваго года найдется такъ: $100 : 107 = 1500 : \frac{1500 \times 107}{100}$, или $a : a + d = b : b \times \frac{a+d}{a}$; а послѣ втораго года капиталъ найдется такимъ образомъ: $a : a + d = b \cdot (\frac{a+d}{a}) : b \cdot (\frac{a+d}{a}) \cdot (\frac{a+d}{a}) = b \cdot (\frac{a+d}{a})^2$, и такъ далѣе въ концѣ 15 го года капиталъ будетъ $b \cdot (\frac{a+d}{a})^n = x$; по сему

Lb.

$Ll\left(\frac{a+d}{a}\right)^{15} = Lx = Lb + 15 \cdot L\left(\frac{a+d}{a}\right)$ то есть Lx
 $= L1500 + 15 \cdot L\frac{107}{100} = L1500 + 15 \cdot (L107 - L100)$
 $= 3.1760913 + 15 \times 0.0293838 = 3.6168483$; ко-
 торому соотвѣствующее число найдется
 4138 рубл. 55 копѣекъ.

Задача XI. Нѣкто опдалъ 1000 рублей съ
 процентомъ по 4 рубли на 100 вѣ годъ, счи-
 тая и на проценты проценты; послѣ нѣсколь-
 кихъ лѣтъ заимодавецъ получилъ съ подле-
 жащими процентами 1800 рублей; спрашивается
 сколько лѣтъ помянутой капиталъ былъ
 вѣ долгу.

Рѣшен. Положимъ, заемная сумма 1000
 рубл. $= a$, 1800 $= d$, простой годовой процентъ
 со ста рублей, коимъ увеличивается сумма
 чрезъ каждой годъ, то есть $\frac{4}{100} = \frac{1}{25} = r$, иско-
 мое время $= x$, слѣдственно годовой интересъ
 съ полной суммы будетъ $1000 \times \frac{1}{25} = ra$, а сум-
 ма капитала съ интересомъ чрезъ годъ будетъ
 $a + ra = a(1+r)$. И такъ вѣ разсужденіи оди-
 накого содержанія долговая сумма чрезъ 2
 года будетъ $a \cdot (1+r) \cdot (1+r) = a \cdot (1+r)^2$;
 чрезъ три года выйдетъ $a \cdot (1+r)^3$, и вообще
 чрезъ искомое число лѣтъ x долговая сумма
 будетъ $a \cdot (1+r)^x = d$. Для разрѣшенія сего,
 означимъ мы сіи количества ихъ логарифмами,
 то есть будетъ $La(1+r)^x = Ld$; (ибо когда
 количества равны, то и логарифмы ихъ равны
 между собою); но поелику логарифмъ произ-
 веденія равенъ суммѣ логарифмовъ множимаго
 и множителя, а логарифмъ всякой степени ра-
 венъ произведенію изъ логарифма корня чрезъ
 по-

показателя степени; по сей причинѣ $La(1+r)^x = Ld = La + x.L(1+r)$, а перенеся величины изъ одной части въ другую, будетъ $Ld - La = x.L(1+r)$, и наконецъ найдется $x = \frac{Ld - La}{L(1+r)}$

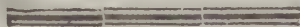
$$= \frac{L_{1800} - L_{1000}}{L_{26} - L_{25}} = \frac{3.2552725 - 3.0000000}{1.4149733 - 1.3979400} = \frac{0.2552725}{0.0170333} \quad \text{И}$$

такъ раздѣля 0.2552725 на 0.0170333, най-
дется, что оной капиталъ увеличился чрезъ
14 лѣтъ 11 мѣсяцовъ 25 $\frac{1}{4}$ дней,

Задача XII. Въ одномъ городѣ изчислено про-
стаго народа 10000 человекъ, отъ котораго
ежегодное приращеніе было постоянно; а по-
слѣ 15 ти лѣтъ нашлось оного 20000 чело-
вѣкъ; спрашивается, какая часть отъ нали-
чнаго числа людей ежегодно рождалась.

Рѣшен. Положимъ, 10000 = a , 20000 = b , 15 = n , а
наличное число людей съ родившимися послѣ первого
года x . И такъ ежели сдѣлаешь сію пропорцію: $a : x$
 $= x : \frac{x^2}{a}$, то найденное число $\frac{x^2}{a}$ покажетъ число людей
съ родившимися послѣ двухъ лѣтъ; потомъ сдѣлай
тройное правило $a : x = \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2}$, то четвертой членъ
 $\frac{x^3}{a^2}$ покажетъ число наличныхъ людей послѣ трехъ
лѣтъ; по сему чрезъ n , или чрезъ 15 лѣтъ число людей
съ родившимися будетъ $\frac{x^n}{a^{n-1}} = b$; откуда найдется x^n
 $= b.a^{n-1}$, въ коемъ $n.Lx = (n-1).La + Lb$, или $15.Lx =$
 $14.La + Lb$, а по раздѣленіи на 15, выйдетъ $Lx = \frac{14.La + Lb}{15}$.
Но $La = 4$, $Lb = 4.3010300$; по сей причинѣ Lx
 $= \frac{60.3010300}{15} = 4.0200686$, котораго соотвѣствующее
число

$= 6 + \frac{6}{x} = 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 6 \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)$; послѣ второго года
 $6 \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$, а чрезъ 200 лѣтъ найдется $6 \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{200}$
 $= 1000000$; раздѣли каждую часть на 6, выйдетъ
 $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{200} = \frac{1000000}{6}$, а по извлеченіи корней будетъ
 $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = \sqrt[200]{\left(\frac{1000000}{6}\right)} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$. Изъ сего удс-
 бно разумѣнь можно, что $L\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{200} \times L\left(\frac{1000000}{6}\right)$
 $= \frac{1}{200} \cdot (L1000000 - L6) = \frac{1}{200} \cdot (5.2218488) = 0.0261092$
 $= L\left(\frac{x+1}{x}\right) = L\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; соотвѣствующее число сего
 логарифма есть $\frac{1061962}{7000000} = 1 + \frac{61962}{7000000} = 1 + \frac{1}{x}$; а отнявъ
 отъ обѣихъ частей 1, будетъ $\frac{61962}{7000000} = \frac{1}{x}$; естлижъ
 изключены будутъ знаменатели, то выйдетъ 619620
 $= 1000000$, откуда найдется $x = \frac{1000000}{61962} =$ почти 16.
 И такъ человѣческій родъ умножался ежегодно почти
 $\frac{1}{16}$ ю частію наличнаго числа людей.



О рѣшеніи непостоянныхъ и неопредѣ- ленныхъ вопросовъ.

§ 188. *Опредѣлен.* Постоянные или опре-
 дѣленные вопросы суть тѣ, кои имѣютъ все-
 гда одно только условное рѣшеніе, каковы
 суть тѣ, кои до сего опредѣленія пред-
 ложены были. Полуопредѣленные или непо-
 стоянные вопросы суть тѣ, изъ коихъ избрѣ-
 тается нѣсколько рѣшеній, одни и тѣжъ усло-
 вія вопроса означающихъ. Неопредѣленные суть

Т

тѣ

ствъ, изъ коихъ выводился безконечное число рѣшеній, одно и то же свойство вопроса означающихъ *).

§ 189. *Прибавлен.* Дабы имѣть о предписанномъ ясное понятіе, то положимъ, на примѣрѣ, пребудетъ найти два числа x и y , коихъ бы сумма была $= 10$; отъ сего произойдетъ уравненіе $x + y = 10$, или $x = 10 - y$. Для разрѣшенія сего вопроса положимъ $y = 9$, то будетъ $x = 10 - 9 = 1$. Если же положимъ $y = 8$, то выйдетъ $x = 2$. и проч. И такъ въ семъ вопросѣ произойти можетъ безконечное число рѣшеній; поелику въ семъ случаѣ можно принять одно число положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробью; слѣдовательно въ разсужденіи сего произойдетъ безконечное число положеній, и потому безконечное число рѣшеній быть можетъ. Сего-то рода вопросы именуются неопредѣленными, и составляютъ такъ называемую неопредѣленную аналитику.

Но еслии къ помянутому вопросу присовокупится и сіе условіе, чѣобы искомыя числа были цѣлыя и при томъ положительныя; то число всѣхъ возможныхъ рѣшеній въ нѣкоторыхъ случаяхъ ограничено быть можетъ, на примѣръ: положимъ, что искомыя числа означен-

е) Сія часть Алгебры имѣетъ совѣтъ общенныя противъ прежнихъ рѣшеній вопросовъ, и для того требуетъ особливыхъ правилъ, посредствомъ коихъ удобно изощрятся разумъ учащихъ, и большая прицаетъ имъ прозорливость въ рѣшеніи важнѣйшихъ Алгебраическихъ предложеній.

ченнаго примѣра x и y должны быть цѣлыя и припомѣ положительныя, но отъ сего выйдетъ только девять возможныхъ рѣшеній, то есть по положенію будетъ $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, откуда найдется $x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; но какъ первыя четыре рѣшенія съ послѣдними суть одинаковы, то для сего вопросъ рѣшится только 5 ю образами. Сему подобныя вопросы называются непостоянными или полуопредѣленными.

Задача I. Найди два числа x и y такія, чтобы первое, прижды взятое, со вторымъ удвоеннымъ составляли число 20.

Рѣшен. По свойству вопроса будетъ $3x + 2y = 20$, откуда найдется $x = \frac{20-2y}{3}$; но какъ x долженъ быть цѣлое положительное число, то изъ сего видно, что 20 больше $2y$ и 10 больше y , слѣдственно y долженъ быть меньше 10 и не больше 7 ми *), которое также должно быть цѣлое положительное; и такъ по исключеніи изъ онаго уравненія, сколько можно цѣлыхъ чиселъ, будетъ $x = 6 + \frac{2-2y}{3} = 6 + 2 \cdot \left(\frac{1-y}{3}\right)$; но поелику дробь $\frac{1-y}{3}$ должна быть цѣлое число, по сему $1-y$ или $y-1$ на 3 безъ остатка дѣлиться должно. Теперь положимъ $\frac{y-1}{3} = z$, или $y-1 = 3z$, то выйдетъ $y = 3z + 1$; по сей причинѣ $x = 6 - 2z$; но по

Т 2

*) Поелику 20 безъ $2y$ на 3 безъ остатка раздѣлится должно.

елику y не болѣе 7 ми быть долженъ, то вмѣсто z никакихъ другихъ чиселъ взять не можно, какъ только шѣ, кои $3z+1$ составляющѣ не больше 7 ми, слѣдовательно z меньше 3 хъ быть долженъ. И такъ когда положимъ $z=0, 1, 2$, то найдемся $y=1, 4, 7$, и $x=6, 4, 2$. Изъ сего видно, что два искомыхъ числа произведутъ слѣдующее: I) $18+2$, II) $12+8$, III) $6+14$, изъ коихъ каждое $=20$: слѣдовательно въ семъ вопросѣ произошло только три рѣшенія.

Задача II. Найти три числа, коихъ бы сумма была $=21$, а разность между первымъ и вторымъ равна разности второго съ третьимъ.

Рѣшен. Пусть будутъ искомыхъ числа x , y и z , то будетъ $x+y+z=21$, $x-y=y-z$, изъ коего найдемся $x=2y-z$; и такъ поставя $2y-z$ въ первомъ уравненіи на мѣсто x , выйдетъ $2y-z+y+z=21$, или $3y=21$, откуда найдемся $y=7$. И такъ когда $x+z+7=21$, то будетъ $z+x=14$, или $x=14-z$. Теперь положи $z=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$, то будетъ $x=13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; но какъ послѣднія шесть рѣшеній одинаковы съ первыми, то всѣхъ рѣшеній только 7, или вопросъ рѣшится 7 ю образами.

Задача III. Число 100 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна дѣлилась на 7, а другая на 11.

Рѣшен. Положимъ, первая часть $=7x$, вторая $=11y$, то будетъ $7x+11y=100$, откуда

куда найдемся $x = \frac{100 - 11y}{7} = \frac{98 + 2 - 7y - 4y}{7}$, а по
 исключеніи цѣлыхъ чиселъ, выйдемъ $x = 14 - y$
 $+ \frac{2 - 4y}{7}$; по сему $2 - 4y$ или $4y - 2$ на 7 раз-
 дѣлились должно, а когда $4y - 2$ на 7 раздѣ-
 лились можетъ, то и половина онаго $2y - 1$,
 также на 7 раздѣлилась должна; и такъ
 пусть будетъ $\frac{2y - 1}{7} = z$, или $2y - 1 = 7z$, оп-
 куда найдемся $y = \frac{7z + 1}{2} = 3z + \frac{z + 1}{2}$. Положимъ
 что $\frac{z + 1}{2} = r$, то найдемся $z = 2r - 1$, $y = 6r$
 $- 3 + r = 7r - 3$, $x = 14 - 7r + 3 + 2 - 4r = 19 - 11r$. И
 такъ когда вмѣсто r цѣлое положительное
 число взять можно, то найдемся по первому
 уравненію, что $7r$ должно быть больше 3 хъ,
 или r больше $\frac{3}{7}$, а по второму $11r$ меньше 19,
 или r меньше $\frac{19}{11}$; ибо когда $\frac{3}{7} = r$, то будетъ
 $3 = 7r$, и въ разсужденіи сего вышло бы, что
 $y = 7 - 3 = 3 - 3 = 0$; по сему r больше нуля,
 и меньше 2 быть должно, слѣдовательно
 остается одна только его величина $r = 1$, оп-
 куда найдемся $x = 8$, и $y = 4$, посредствомъ
 чего найдутся требуемыя часпи, первая $7x$
 $= 56$, вторая $11y = 44$.

Задача IV. Нѣсколько человекъ мушинъ
 и женщинъ заплашили за содержаніе ихъ 100
 рублей, каждая изъ послѣднихъ заплашила 5
 рублей и сверхъ всей суммы 2 рубли, а каждой
 изъ молодцовъ по 7 ми рублей съ прибавкою
 на ту сумму 4 хъ рублей; спрашивается число
 мушинъ и женщинъ.

Рѣшен. Положимъ число женщинъ x , молодыхъ y , по сему женщины заплашили $5x+2$ рубл., а мужчины $7y+4$. И такъ $5x+2+7y+4=100$, или $5x+7y=94$, откуда выйдетъ $5x=94-7y$, или $x=\frac{94-7y}{5}=18-y+\frac{4-2y}{5}$. Теперь положимъ, $\frac{4-2y}{5}=q$, или $\frac{y-2}{5}=q$, то найдется $y=5q+2$, $x=18-5q-2+\frac{4-10q-4}{5}=18-2-5q-2q=16-7q$. Изъ сего видно, что $7q$ меньше 16 пи, или меньше $\frac{16}{7}$, следовательно больше 2 хъ быть не можетъ. И такъ положимъ $q=0, 1, 2$, то найдется $x=16, 9, 2$ число женщинъ, $y=2, 7, 12$ число мужчинъ; следовательно сей вопросъ рѣшился только тремя образами, то есть женщинъ было 16 либо 9 или 2, а мужчинъ 2, 7 или 12.

Задача V. Два гранодера имѣютъ вмѣстѣ 100 папировъ; первой говоритъ другому: ежели я свои по 8 считать буду, то у меня останется 7; а другой сказалъ: когда я свои по 10 считать начну, то и у меня въ остаткѣ также будетъ 7; спрашивается сколько каждой папировъ имѣетъ.

Рѣшен. Поелику когда число первого раздѣлился на 8, то въ остаткѣ будетъ 7, а отъ раздѣленія числа другаго на 10 останется также 7; по сей причинѣ положимъ число рядовъ первого $=8x+7$, а втораго $=10y+7$, то будетъ $8x+10y+14=100$, или $8x=86-10y$, а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $4x=43-5y$, въ которомъ найдется $x=\frac{43-5y}{4}=10-y$

$+ \frac{3-y}{4}$. Изъ сего видно, что $3-y$ или $y-3$ на 4 дѣлились должны; и такъ положимъ $\frac{y-3}{4} = z$, то будемъ $y-3=4z$, или $y=4z+3$; откуда найдемъ $x=10-3-4z-z=7-5z$, по сему $5z$ меньше 7 ми быть должно, или z меньше $\frac{7}{5}$, по сему z меньше 2 хѣ. И такъ положимъ $z=0, 1$, то найдемъ $x=7, 2$; $y=3, 7$, слѣдовательно въ семъ вопросѣ вышло два рѣшенія, изъ коихъ по первому рѣшенію у перваго было $7 \times 8 + 7 = 63$, а по второму $2 \times 8 + 7 = 23$; а у втораго по первому рѣшенію $3 \times 10 + 7 = 37$, по второму $7 \times 10 + 7 = 77$.

Задача. VI. Въ нѣкоторомъ собраніи мушцины и женщины издержали вмѣстѣ 1000 коп.; каждой мушина заплатилъ 19 коп., а каждая женщина 13 коп.; спрашивается, сколько было мушинъ и сколько женщинъ.

Рѣшен. Пусть будетъ число мушинъ x , а женщинъ y , то произойдетъ уравненіе $19x + 13y = 1000$, изъ сего найдемъ $13y = 1000 - 19x$, или $y = \frac{1000-19x}{13} = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$; по сему $12-6x$ или $6x-12$, также и шестая часть онаго, то есть $x-2$ на 13 дѣлились должно; и такъ положимъ $\frac{x-2}{13} = z$, откуда найдемъ $x = 13z + 2$, а $y = 76 - 13z - 2 - 6z = 74 - 19z$. Изъ сего видно, что z долженъ быть меньше $\frac{74}{19}$ или меньше 4 хѣ; по сей причинѣ предложенной вопросъ заключаешь въ себѣ 4 слѣдующія рѣшенія: 1) когда положимъ $z=0$, то выйдетъ

Т 4 $x =$

$x=2$, $y=74$, то естъ 2 с мушнѣ и 74 женщины; первые заплашили 38 коп. а послѣднѣ 962 коп.; II) когда $z=1$, то $x=15$, а $y=55$, первые издержали 285 коп. а послѣднѣ 715 коп.; III) ежели $z=2$, то $x=28$, а $y=36$, первые заплашили 532 коп. а другія 468 коп.; IV) будежъ положимъ $z=3$, то найдется $x=41$, а $y=17$; мушны заплашили 779 коп. а женщины 221 коп.

Задача. VII. Въ кавалерійской полкъ куплено на 1770 рублей спроевыхъ и подѣмныхъ лошадей; за спроевую лошадь плачено по 31 рублю, а за каждую подѣмную по 21 рублю; спрашивается сколько куплено спроевыхъ и сколько подѣмныхъ лошадей.

Рѣшен. Положимъ, число спроевыхъ лошадей x , подѣмныхъ $=y$, то будетъ $31x + 21y = 1770$ рубл. или $21y = 1770 - 31x$, откуда найдется $y = \frac{1770 - 31x}{21} = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21}$; по сему $10x - 6$, также и половина онаго $5x - 3$ раздѣлился на 21; и такъ положимъ $\frac{5x - 3}{21} = z$, или $5x - 3 = 21z$, будетъ $x = \frac{21z + 3}{5} = 4z + \frac{z + 3}{5}$, $= 4z + u$ *), гдѣ $\frac{z + 3}{5} = u$ или $z + 3 = 5u$; откуда найдется $z = 5u - 3$, $x = 4(5u - 3) + u = 21u - 12$, $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$.

Изъ

*) Дабы не всегда повпорять одинакія слова положенія, то какъ въ семъ рѣшеніи, такъ и въ послѣдующихъ, будетъ спавиться вмѣсто дроби произвольная буква, не упоминая ничего.

Изъ сего видно, что u больше 0, а меньше 4 хѣ; по сей причинѣ выйдутъ при слѣдующія рѣшенія: I) положи $u=1$, будетъ число спрое-
выхъ лошадей $x=9$, а подъемныхъ $y=71$, за
первыхъ заплачено 279 рубл. а за подъемныхъ
1491 рубль. II) когда $u=2$, то будетъ $x=30$,
 $y=40$. III) еслии $u=3$, то будетъ $x=51$,
а $y=9$.

Задача. VIII. Нѣкто долженъ 1200 рублей,
и желаетъ сей долгъ плащить сукномъ и бар-
хатомъ; послѣдняго изъ сихъ, аршинъ по 7 ми
рубл. а перваго по 5 рублей; спрашив. сколько
аршинъ каждаго отдать должно.

Рѣшен. Положимъ число аршинъ бархату
 x , сукна y , то будетъ $7x+5y=1200$, $x=\frac{1200-5y}{7}$
 $=171+\frac{3-5y}{7}$; пусть $\frac{3-5y}{7}$ или $\frac{5y-3}{7}=z$, бу-
детъ $5y-3=7z$, или $y=\frac{7z+3}{5}=z$
 $+\frac{2z+3}{5}=z+r$, гдѣ $r=\frac{2z+3}{5}$; откуда найдется
 $2z+3=5r$, или $z=\frac{5r-3}{2}=2r+\frac{r-3}{2}=2r+t$; по
сему $t=\frac{r-3}{2}$, или $2t=r-3$, гдѣ $r=2t+3$;
изъ сего найдется $z=4t+6+t=5t+6$, $y=7t$
 $+9$, $x=171-5t-6=165-5t$. Изъ сего видно,
что $\frac{165}{5}=33$, слѣдовательно t меньше 33 быть
должно, то есть не больше 32. И такъ поло-
живъ $t=0, 1, 2, 3, 4$ и проч. 32, выйдутъ
слѣдующія Ариѳметическія прогрессіи: $y=9, 16,$
 $23, 30$ и проч. 233; $x=165, 160, 155, 150$ и
проч. 5; изъ коихъ у первой разность 7, а

у второй 5; слѣдственно сей вопросъ имѣетъ 33 рѣшенія.

Примѣчан. Предложенные до сихъ поръ вопросы основаніе свое имѣютъ на слѣдующемъ уравненіи: $ax+by=c$, гдѣ буквы a и b означаютъ цѣлыя и положительныя числа, и количество c никогда нулемъ быть не можетъ.

Задача. IX. Найти два числа x и y такія, чтобы $33x$ равны были $76+59y$.

Рѣшен. Когда $33x=76+59y$, то будетъ $x=\frac{76+59y}{33}=2+y+\frac{2(5+13y)}{33}$. Пусть будетъ $\frac{5+13y}{33}=p$, то выйдетъ $5+13y=33p$, откуда найдется $y=\frac{33p-5}{13}=2p+\frac{7p-5}{13}=2p+r$, гдѣ $\frac{7p-5}{13}=r$ или $7p-5=13r$, въ коемъ выйдетъ $p=\frac{13r+5}{7}=r+\frac{6r+5}{7}=r+q$; и такъ когда $\frac{6r+5}{7}=q$, то будетъ $r=\frac{7q-5}{6}=q+\frac{q-5}{6}=q+t$; по сему $\frac{q-5}{6}=t$, изъ котораго выйдетъ $q=6t+5$, откуда найдется $r=7t+5$, $p=13t+10$, $y=33t+25$, $x=59t+47$. Но какъ въ семъ уравненіи t должно быть цѣлое и положительное число *); то положивъ $t=1$, найдется самое меньшее число $x=106$, $y=58$. Отсюда произойдетъ безконечное число рѣшеній: ибо положивъ $t=2$, найдется $x=165$, $y=91$ и такъ далѣе произойдутъ Ариѳметическія прогрессіи безконечнаго числа членовъ, изъ коихъ у первой разность 59, а у второй 33.

При-

*) Ибо ежели положимъ $t=-1$, то выйдетъ $x=59t+47=59-47=12$ число невозможное.

Примѣчан. Положимъ, въ помянутомъ уравненіи $\frac{5+13y}{33}$ предложеннаго вопроса будетъ $5=a$, $13=d$, $33=c$, то будетъ первая дробь, представляющая величину, $p=\frac{a+dy}{c}$, и уравненіе $cp=dy+a$ можетъ быть изображено такимъ образомъ: $pc-dy=a$, въ которомъ количество d есть отрицательное; по сей причинѣ во всѣхъ такого рода вопросахъ, какъ и въ предъидущемъ, будетъ безконечное число рѣшеній. Если же количество a будетъ $=0$, и pc одному только dy равно: то и въ семъ случаѣ выйдетъ такоежъ число рѣшеній.

Но ежели при разрѣшеніи дроби $\frac{a+dy}{c}=p$ оба количества a и c будущъ числа не первыя, то есть каждое изъ нихъ кромѣ единицы еще заключаетъ въ себѣ какихъ нибудь множителей: то въ семъ случаѣ надлежитъ примѣчать, что такой вопросъ будетъ невозможной; послѣку положимъ на прим. $c=9$, $d=15$, $a=2$, то будетъ $p=\frac{2+15y}{9}=y+\frac{6y+2}{9}=y+q$, гдѣ $q=\frac{6y+2}{9}$, или $6y+2=9q$; по сему $y=\frac{9q-2}{6}=q+\frac{3q-2}{6}=q+r$, въ коемъ $\frac{3q-2}{6}=r$, или $3q-2=6r$, гдѣ $q=\frac{6r+2}{3}=2r+\frac{2}{3}$. Откуда явствуетъ, что количество q никогда дѣльнымъ числомъ быть не можетъ; ибо r непременно цѣлое число быть должно, слѣдовательно такіе вопросы по ихъ свойствамъ суть не возможны.

Задача. X. Найди число, которое бы на 2 и на 3 дѣлилось могло.

Рѣшен. Пусть будетъ искомое число $=N$, положимъ $N=2x$ и $N=3y$; по сему будетъ $2x=3y$ или $x=y+\frac{y}{2}$; теперь положи $\frac{y}{2}=z$, откуда найдется $y=2z$, $x=3z$, $N=6z$. И такъ еслили $z=1, 2, 3, 4$ и прочая, то выйдетъ $N=6, 12, 18, 24, 30$ и такъ далѣе. Изъ сего
ви-

видно, что въ семъ случаѣ выйдетъ безконечное число рѣшеній, такъ что самое меньшее число $= 6$, а далѣе слѣдующія числа составляютъ безконечно возрастающую Арифметическую прогрессию, у которой разность $= 6$.

Задача. XI. Поваръ купилъ нѣсколько пестеревей и зайцовъ; за каждого пестерева заплатилъ по 31 коп. а за всякаго зайца по 20 коп. Послѣ покупки нашлось, что за зайцовъ заплачено 7 коп. больше, нежели за пестеревей; спрашивается сколько куплено первыхъ и послѣднихъ.

Рѣшен. Положимъ, число пестеревей x , и число зайцовъ y ; то по свойству вопроса будетъ $20y = 31x + 7$, гдѣ $y = \frac{31x + 7}{20} = x + \frac{11x + 7}{20}$
 $= x + p$, въ коемъ $\frac{11x + 7}{20} = p$, или $11x + 7 = 20p$, откуда найдется $x = \frac{20p - 7}{11} = p + \frac{9p - 7}{11}$
 $= p + r$, гдѣ $\frac{9p - 7}{11} = r$, или $9p - 7 = 11r$; изъ котораго выйдетъ $p = \frac{11r + 7}{9} = r + \frac{2r + 7}{9}$
 $= r + t$; гдѣ $\frac{2r + 7}{9} = t$, или $2r + 7 = 9t$, откуда выйдетъ $r = \frac{9t - 7}{2} = 4t + \frac{t - 7}{2} = 4t + u$, по сему $\frac{t - 7}{2} = u$ или $t - 7 = 2u$, гдѣ $t = 2u + 7$;
отсюда найдется $r = 4t + u = 9u + 28$, $p = r + t = 11u + 35$, $x = p + r = 20u + 63 =$ числу пестеревей, $y = x + p = 31u + 98 =$ числу зайцовъ. Изъ сего удобно разумѣть можно, что вмѣсто u отрицательное

ное число не больше $3x$ взять можно *). И такъ положимъ $u = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ и проч. то будетъ $y = 5, 36, 67, 98, 129, 160$ и проч. $x = 3, 23, 43, 63, 83$ и проч., изъ коихъ каждой рядъ составляетъ изъ безконечнаго числа членовъ Арифметическую прогрессию, такъ что у первой разность 31, а у второй 20, изъ коихъ каждая въ разсужденіи x и y равна предстоящему числу величины u .

Примѣчан. Когда въ семъ примѣрѣ прилѣжнѣе разсмотримъ, какимъ порядкомъ находятся буквы x и y : то найдемъ, что сіе рождается опѣ Геометрическаго содержанія чиселъ 31 и 20, которое основаніе свое имѣетъ на томъ же самомъ порядкѣ, по которому ищется самой большой сихъ чиселъ общій дѣлитель (част. I § 78),

$$\begin{array}{r} 31 \overline{) 20} \quad 1 \\ \underline{20} \\ 11 \\ 11 \overline{) 11} \quad 1 \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

какъ изъ слѣдующаго видно: изъ чего легко усмотрѣть можно, что частныя числа въ слѣдующихъ другъ за другомъ изобрѣщеніяхъ буквъ p, r, t, u и проч. выходятъ тѣмъ же порядкомъ, и съ первою буквою на правой рукѣ связываются, а послѣдняя буква остается всегда одинака, что всего удобнѣе видѣть можно изъ слѣдующей таблички, гдѣ напередъ раздробленіе чиселъ 31 и 20 представлено, а потомъ изобрѣщенія буквъ p, r, t и проч. изображаются.

$31 = 1 \times 20 + 11$	$y = 1.x + p$	Здѣсь въ послѣднемъ изобрѣщеніи буквы берется + и, когда число такихъ опредѣленій будетъ нечотное; напротивъ того — и, ежели оно будетъ чотное.
$20 = 1 \times 11 + 9$	$x = 1.p + r$	
$11 = 1 \times 9 + 2$	$p = 1.r + t$	
$9 = 4 \times 2 + 1$	$r = 4.t + u$	
$2 = 2 \times 1 + 0$	$t = 2.u + u$	

Задача XII. Въ практирѣ будучи, каждой муцина издержалъ 63 коп. женщина 17 коп.; послѣ того содержатель нашолъ, что послѣдняя

из-

е) поелику когда положимъ $u = -4$, то выйдетъ $y = 311 + 98 = 124 + 98 = 26$ число невозможное.

издержали 5ю копѣйками больше, нежели первые ; спраш. число мущинъ и женщинъ.

Рѣшен. Положимъ число женщинъ x , мущинъ y , то будетъ $17x = 63y + 5$, гдѣ $x = \frac{63y+5}{17}$
 $= 3y + \frac{12y+5}{17} = 3y + p$, въ коемъ $\frac{12y+5}{17} = p$,
или $12y + 5 = 17p$, откуда найдемся $y = \frac{17p-5}{12}$
 $= p + \frac{5p-5}{12} = p + q$, гдѣ $\frac{5p-5}{12} = q$, или $5p$
 $- 5 = 12q$, изъ коего выйдетъ $p = \frac{12q+5}{5} = 2q$
 $+ \frac{2q+5}{5} = 2q + r$, гдѣ $\frac{2q+5}{5} = r$, или $2q + 5$
 $= 5r$; отсюда выйдетъ $q = \frac{5r-5}{2} = 2r + \frac{r-5}{2} =$
 $2r + t$, гдѣ $\frac{r-5}{2} = t$ или $r - 5 = 2t$, изъ сего
выйдетъ $r = 2t + 5$, откуда найдемся $q = 5t$
 $+ 10$, $p = 12t + 25$, $y = 17t + 35$, $x = 63t$
 $+ 130$. Изъ сего видно, что t можетъ быть
принято отрицательнымъ числомъ, которое
больше 2хъ быть не можетъ. И такъ положимъ
 $t = -2, -1, 0, 1, 2$, и прочая, то отсюда
найдемся $y = 1, 18, 35, 52, 69$ и проч.; $x = 4,$
 $67, 130, 193, 256$ и проч. изъ коихъ каждой
рядъ составляетъ безконечнаго числа чле-
новъ Арифметическую прогрессию, такъ что у
первой разность 17, а у послѣдней 63.

Задача XIII. Найми число, которое бы дѣ-
лилось на 2, а когда раздѣлился на 3 то бы
въ остаткѣ было 1.

Рѣшен. Положимъ искомое число $N = 2x$, и
 $N = 3y + 1$; по сему $2x = 3y + 1$, или $x =$
 $\frac{3y+1}{2}$

$\frac{3y+1}{2} = y + \frac{y+1}{2} = y + q$, гдѣ $\frac{y+1}{2} = q$, или $y=2q-1$, откуда найдемся $x=3q-1$, $N=6q-2$. Изъ сего видно, что вмѣсто a всякое число взявъ можно. И такъ положимъ $q=1, 2, 3, 4$, и проч. то будетъ $N=4, 10, 16, 22$ и такъ далѣе въ прогрессіи Арифметической, у которой разность 6.

Прибавленіе: Если потребно будетъ найти два числа такіа, чтобы $3x-5y$ было $=9$ ни, то сей вопросъ имѣетъ такоежъ рѣшеніе, какъ и предъидущей.

Задача XIV. Найди число, которое бы на 2, на 5 и на 7 дѣлилось могло.

Рѣшен. Положимъ $N=2x$, $N=5y$, по сему $2x=5y$, или $x=\frac{5y}{2}=2y+\frac{y}{2}=2y+z$, гдѣ $\frac{y}{2}=z$ или $y=2z$, а $2x=10z$, и $x=5z$. Теперь положи $N=7r=10z$, откуда найдемся $r=\frac{10z}{7}=z+\frac{3z}{7}=z+u$, гдѣ $\frac{3z}{7}=u$, или $3z=7u$; изъ сего выйдетъ $z=\frac{7u}{3}=2u+\frac{u}{3}=2u+t$, и такъ когда $\frac{u}{3}=t$, то будетъ $u=3t, z=7t, r=10t, y=14t, x=35t, N=70t$; но какъ число 70 на 2, на 5 и на 7 раздѣлено быть можетъ, то положивъ $t=1, 2, 3, 4, 5, 6$ и проч. выйдетъ $N=70, 140, 210, 280$, и такъ далѣе произойдутъ числа, составляющія безконечную Арифметическую прогрессію, у которой разность 70.

Зада-

Задача XV. Найми число, которое ежели раздѣлился на 8, въ остаткѣ будетъ 5, а будучи раздѣлено на 11, въ остаткѣ 9.

Рѣшен. Положимъ $N=8x+5$, и $N=11y+9$, то будетъ $8x+5=11y+9$, изъ котораго выйдетъ $x=\frac{11y+4}{8}=y+\frac{3y+4}{8}=y+z$, гдѣ $\frac{3y+4}{8}=z$ или $3y+4=8z$, откуда найдется $y=\frac{8z-4}{3}=2z+\frac{2z-4}{3}=2z+p$, гдѣ $\frac{2z-4}{3}=p$, или $2z=3p+4$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $z=\frac{3p+4}{2}=p+\frac{p+4}{2}=p+r$, гдѣ $\frac{p+4}{2}=r$, или $p=2r-4$; откуда найдется $z=3r-4$, $y=6r-8+2r-4=8r-12$, $x=11r-16$, $N=8x+5=88r-123$. Изъ сего видно, что r меньше двухъ быть не можетъ. И такъ положимъ $r=2, 3, 4, 5$ и прочая, то будетъ $N=53, 141, 229, 317$, и такъ далѣе бесконечно въ прогрессіи Ариѣметической, у которой разность 88.

Задача XVI. Нѣкто купилъ за 50 рублей разнаго рода 50 скопинъ, какъ-то, коровъ, свиней и овецъ; плашилъ за всякую корову по $3\frac{1}{2}$ рубл., за каждую свинью по $1\frac{1}{2}$ рубл., а за овцу по $\frac{1}{2}$ рубл. спраш. сколько каждаго рода скопинъ куплено.

Решен. Положимъ, число коровъ x , свиней y , овецъ z ; то будетъ $x+y+z=50$, $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=50$ рубл. или $7x+3y+z=100$; изъ перваго уравненія найдется $z=50-y-x$, которое поставя въ послѣднемъ уравненіи на мѣсто

мѣсто z , выйдетъ $7x + 3y + 150 - x - y = 100$, или $6x + 2y = 50$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $3x + y = 25$, откуда найдется $y = 25 - 3x$, $z = 50 - 25 + 3x - x = 25 + 2x$. Изъ уравненія жъ $y = 25 - 3x$ видно, что x больше 8 быть не можетъ. И такъ положимъ

$x = 8, 7, 6, 5$ и прочая, то	$x = 8, y = 1, z = 41.$
найдется I) $y = 1, z = 41$,	$- 7, - 4, - 39.$
II) $y = 4, z = 39$ и такъ да-	$- 6, - 7, - 37.$
лѣе выйдетъ восемь рѣше-	$- 5, - 10, - 35.$
ній, какъ-то изъ предло-	$- 4, - 13, - 33.$
женной здѣсь таблицы ви-	$- 3, - 16, - 31.$
дѣть можно.	$- 2, - 19, - 29.$
	$- 1, - 22, - 27.$

Задача. XVII. Нѣкто имѣетъ трехъ пробъ золото, первое 70 й пробы, второе 55 пробы, третье 45 пробы, изъ коего желаетъ сдѣлать 30 лотовъ 60й пробы; спрашивается, сколько котораго въ смѣшеніе взять надлежитъ.

Рѣшен. Положимъ въ смѣшеніе возьмется первой пробы x лотовъ, второй y , а третьей z лотовъ, отъ чего выйдутъ слѣдующія уравненія: I) $x + y + z = 30$, II) когда возьмется 70 $x + 55y + 45z$ первого уравненія, то сумма ихъ будетъ равна суммѣ всѣхъ частей смѣшиваемого количества, то есть 30 ти 60 разъ взятому или 1800 пробнымъ частямъ; по сей причинѣ $70x + 55y + 45z = 1800$, а по раздѣленіи на 5 выйдетъ $14x + 11y + 9z = 360$; вычти изъ сего уравненія первое девять разъ взятое, останется $5x + 2y = 90$, откуда найдется $2y = 90 - 5x$ или $y = \frac{90 - 5x}{2} = 45 - 2x - \frac{x}{2} = 45 - 2x - u$,

у

гдѣ

гдѣ $u = \frac{x}{2}$ или $x = 2u$, по сему $y = 45 - 5u$; но какъ изъ перваго уравненія найдется $z = 30 - x - y$, по сей причинѣ $z = 30 - 2u - 45 + 5u = 3u - 15$. Изъ сего видно, что u больше 5 ти, и меньше 9 быть должно; ибо ежели будетъ $u = 5$, то будетъ $z = 3u - 15 = 15 - 15 = 0$; а когда $u = 9$, то $y = 45 - 5u = 45 - 45 = 0$. И такъ положимъ $u = 6, 7$ и 8 . то будетъ; $x = 12, y = 15, z = 3$ слѣдовательно сей вопросъ - 14, - 10, - 6 имѣетъ три рѣшенія. - 16, - 5, - 9

Задача XVIII. За 30 бутылокъ разныхъ винъ заплачено 75 рублей; за каждую бутылку бургонскаго плачено 5 рубл. за бутылку шампанскаго 3 рубли, и за всякую бутылку кагорскаго 2 рубл. спрашивается, сколько бутылокъ каждаго вина куплено.

Рѣшен. Положимъ число бутылокъ перваго x , втораго y , третьяго z , отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія: 1) $x + y + z = 30$, 11) $5x + 3y + 2z = 75$, вычти удвоенное первое уравненіе изъ послѣдняго, останется $3x + y = 15$, или $y = 15 - 3x$. Изъ сего удобно разумѣть можно, что x больше 4 хъ быть не можетъ. Теперь вычти второе уравненіе изъ упрощеннаго перваго уравненія, останется $z - 2x = 15$, или $z = 15 + 2x$; но какъ $x < 5$, по сему $2x < 10$. И такъ положимъ $x = 4, 3, 2, 1$, то найдется $y = 3, 6, 9, 12$; $z = 23, 21, 19, 17$. Слѣдовательно сей вопросъ имѣетъ четыре рѣшенія, изъ коихъ въ каждомъ представляется различное число бутылокъ.

Приба-

Прибавлен. Такимъ же образомъ рѣшится и слѣдующій вопросъ: нѣкоторой путешественникъ купилъ прехъ родовъ 30 медалей за 75 рубл., изъ коихъ за каждую перваго роду платилъ 5 рубл. втораго 3 рубл. третьяго 2 рубли; требуется число медалей каждаго рода.

Задача XIX. Три купца положили для общаго торгу по нѣскольку рублей, такъ что, ежели число рублей перваго умножимъ чрезъ 3, втораго чрезъ 5, а третьяго чрезъ 7, то сумма произведеній будетъ $= 560$; но ежели умножимъ число рублей перваго чрезъ 9 втораго чрезъ 25, а третьяго чрезъ 49, то сумма произведеній будетъ 2920 ; спрашивается число денегъ каждаго.

Рѣшен. Положимъ число рублей перваго купца x , втораго y , а третьяго z . то произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $3x + 5y + 7z = 560$, II) $9x + 25y + 49z = 2920$. Теперь упрощенное первое уравненіе вычпи изъ втораго, останется $10y + 28z = 1240$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $5y + 14z = 620$; откуда найдемся $y = 124 - 2z - \frac{4z}{5}$. Изъ сего видно, что z дол-

жно дѣлиться на 5, и такъ положимъ $\frac{z}{5} = u$,

или $z = 5u$, то найдемся $y = 124 - 14u$; слѣдовательно ежели сіи количества поставятся въ первомъ уравненіи, то будетъ $3x + 620 - 70u + 35u = 560$ или $3x = 35u - 60$, а по раз-

дѣленіи на 3 выйдетъ $x = 11u - 20 + \frac{2u}{3} = 11u - 20 + t$, гдѣ $\frac{2u}{3} = t$ или $2u = 3t$, а по раздѣ-

леніи на 2 выйдетъ $u = \frac{3t}{2} = t + \frac{t}{2} = t + r$, въ

у 2

коемъ

коемъ $\frac{t}{2} = r$ или $t = 2r$; отсюда найдемся $u = 3r$,
 $x = 35r - 20$, $y = 124 - 42r$, $z = 15r$. Изъ сего
 видно, что r меньше 3 хъ быть должно; ибо
 въ противномъ случаѣ будетъ $y = 124 - 42r$
 $= 124 - 126 = -2$ количество невозможное, и ну-
 лемъ также быть не можетъ; потому что
 $x = 35r - 20$; ибо въ такомъ случаѣ будетъ
 $x = -20$. И такъ положимъ $r = 1, 2$, то вый-
 демъ $x = 15$ или 50, $y = 82$ или 40, $z = 15$,
 или 30; слѣдовательно въ семъ вопросѣ заклю-
 чается только 2 рѣшенія.

Задача XX. 20 лошадей разположить въ 5
 пи конюшняхъ такимъ образомъ, чтобы въ
 каждой было число лошадей нечотное.

Рѣшен. Пусть будетъ число лошадей въ
 первой конюшнѣ t , во второй u , въ третьей x ,
 въ четвертой y , въ пятой z . Когда t и u суть
 числа нечотныя, то сумма ихъ $t + u$ непре-
 мѣнно будетъ число чотное, которое пусть
 будетъ $= p$. Равнымъ образомъ и $y + x$ будетъ
 также число чотное, которое положимъ $= q$;
 но сумма двухъ чотныхъ $p + q$, также будетъ
 чотное число $= n$; по сему когда n сложится
 съ нечотнымъ числомъ z , то сумма сихъ двухъ
 чиселъ $n + z$, изъ коихъ одно чотное, а другое
 нечотное, будетъ непременно нечотное; по сей
 причинѣ и число всѣхъ лошадей должно быть
 нечотное; но какъ число 20 есть чотное, по-
 то ради сей вопросъ есть невозможной.

Вопросъ также будетъ невозможной, ежели должно бу-
 деть 100 лошадей разставишь въ 7 конюшняхъ, такъ
 чтобы въ каждой было нечотное число; поединку 7 не-
 чо-

чотныхъ чиселъ, вмѣстѣ взятыхъ, по есть сумма всѣхъ нечотныхъ чиселъ, также будетъ число нечотное.

Задача XXI. Миронъ да Февронъ, каждой имѣетъ нѣсколько рублей, такъ что ежели къ произведенію изъ числа ихъ денегъ придаютъ сумму всѣхъ денегъ, по выйдетъ число 79; спрашив. число рублей каждаго.

Рѣшен. Положимъ число рублей перваго x втораго y : по по свойству вопроса будетъ $xy + x + y = 79$, по сему $xy + y = 79 - x$, гдѣ $y = \frac{79-x}{x+1} = -1 + \frac{80}{x+1}$; изъ сего видно, что количество $x+1$ есть дѣлитель числа 80. И такъ положимъ, что x и y суть числа дѣляя и положительныя; по сей причинѣ поспавя всѣхъ дѣлителей числа 80, произойдутъ слѣдующія въ приложенной таблицѣ рѣшенія:

дѣлит. числа 80	1	2	4	5	16	10	16	20	40	80
$x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
$y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

но какъ послѣднія 5 рѣшеній съ первыми одинаки, по сей причинѣ вышло только пять рѣшеній.

Задача XXII. Къ даннымъ числамъ m, a, b и c найди дѣляя числа x и y , отъ коихъ бы произошло уравненіе $mxy = ax + by + c$.

Рѣшен. Въ данномъ уравненіи по переставкѣ величинъ будетъ $mxy - by = c + ax$, откуда найдется $y = \frac{c+ax}{mx-b}$, а по умноженіи на m выйдетъ $my = \frac{mc+amx}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Положимъ $mc+ab = hk$, изъ коего выйдетъ $\frac{mc+ab}{h} = k$; по се-

му $my = a + \frac{kh}{mx-b}$. Изъ сего видно, что числитель $mc+ab$ или hk долженъ дѣлиться на $mx-b$. Теперь положивъ $mx-b=h$, будемъ $x = \frac{b+h}{m}$, а $my = a + \frac{hk}{h} = a+k$, или $y = \frac{a+k}{m}$; но поелику $h+b$ должно дѣлиться на m , по здѣсь надлежитъ брать такихъ дѣлителей количества $mc+ab$, которые будучи сложены съ b , могли бы дѣлиться на m . И такъ положимъ $m=4$, $a=2$, $b=3$, $c=222$, то выйдетъ $my = a + \frac{mc+ab}{mx-b} = 4y = 2 + \frac{894}{4x-3}$, въ коемъ дѣлителе числа 894 суть 1, 2, 3, 6, 149, 298, 447, 894; но какъ $x = \frac{h+b}{m} = \frac{h+3}{4}$, то здѣсь должно брать такихъ дѣлителей вмѣсто h , кои будучи сложены съ 3, могли бы дѣлиться на 4. И такъ пусть будемъ $h=1$, то выйдетъ $x = \frac{1+3}{4} = 1$, $k=894$, по сему $y = \frac{a+k}{m} = \frac{896}{4} = 224$. Еслилижъ положимъ $h=149$, то будемъ $x = \frac{149+3}{4} = 38$, $k=6$, $y=2$.

Примѣчан. Изъ общаго рѣшенія предложеннаго вопроса видно, что $my - a = \frac{ab+mc}{mx-b}$, слѣдственно не трудно найти числа, на которыя бы количество $ab+mc$ безъ остатка дѣлилось могло; ибо по умноженіи знаменателемъ $mx-b$, будемъ $(my-a)(mx-b) = ab+mc$. И такъ положимъ $m=10$, $a=8$, $b=6$ и $c=20$, то уравненіе изобразится такимъ образомъ: $(10y-8)(10x-6) = 48 + 200 = 248$, а по раздѣленіи на $10x-6$ выйдетъ $10y-8 = \frac{248}{10x-6}$; по сему число 248 на $10x-6$ безъ остатка

дѣлится должно; но какъ дѣлители числа 248 суть 1, 2, 4, 8, 62, 124, 248, то положимъ I) $10x-6=4$, или $x=\frac{4+6}{10}=1$, II) $10x-6=124$, гдѣ выйдетъ $x=\frac{124+6}{10}=13$; отсюда найдемся I) $10y-8=\frac{248}{10-6}=\frac{248}{4}=62$, а переставя величины и раздѣля на 10 выйдетъ $y=\frac{70}{10}=7$, II) $10y-8=\frac{248}{130-6}=\frac{248}{124}=2$, откуда найдется $y=\frac{2+8}{10}=1$.

Задача XXIII. Іофанъ имѣетъ число рублей x , а Митрофанъ y , отъ коихъ происходитъ уравненіе $5xy=2x+3y+18$; требуется знать число рублей каждаго.

Рѣшен. Изъ предположеннаго уравненія $(my-a)x(mx-b)=ab+mc$, выйдетъ $(5y-2).(5x-3)=6+50=96$, а по раздѣленіи на $5x-3$ найдется $5y-2=\frac{96}{5x-3}$. Изъ сего удобно разумѣть можно, что изъ дѣлителей числа 96 надлежитъ брать такихъ, которые бы равны были $5x-3$, или будучи сложены съ 3 на 5 дѣлились могли; но какъ дѣлители числа 96 суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96; изъ коихъ требуемые дѣлители будутъ 2, 12 и 32. И такъ положимъ $5x-3=2$, то будетъ $x=\frac{2+3}{5}=1$, а $5y-2=\frac{96}{2}=48$, по сему $5y=48+2=50$, или $y=\frac{50}{5}=10$; еслилижъ положимъ $5x-3=12$, то будетъ $x=3$, а $y=2$; и наконецъ когда положимъ $5x-3=32$, то найдемся $x=7$, $y=1$; слѣдовательно сей вопросъ имѣетъ только три рѣшенія.

Примѣчан. Такимъ же образомъ рѣшить можно уравненіе $xy+dx^2=kx^3+ax+by+c$, только бы y всегда былъ первой степени.

Задача XXIV. Павелъ имѣетъ число лошадей x , а Петрѣ y , такъ что отъ сего произойдетъ уравненіе $x^2+xy=2x+3y+29$; спрашивается число лошадей каждого.

Рѣшен. Изъ данного уравненія найдемся $y = \frac{2x-x^2+29}{x-3} = -x-1+\frac{26}{x-3}$, а переставя величины изъ одной части въ другую будетъ $y+x+1 = \frac{26}{x-3}$. Изъ сего видно, что $x-3$ заключается между дѣлителями числа 26, которое будучи раздѣлено на $x-3$, частное будетъ $=y+x+1$; но дѣлители числа 26 суть 1, 2, 13, 26. И такъ ежели для рѣшенія сего вопроса положимъ $x-3=1$ или $x=4$, то будетъ $y+x+1=y+5=26$, по сему $y=26-5=21$; естлижъ положимъ $x-3=2$, то будетъ $x=5$, а $y=7$; а когда положимъ $x-3=13$ или $x=13+3=16$, то будетъ $y=-15$. Сія послѣдняя величина, будучи отрицательною, въ рѣшеніе принята быть не можетъ.

§ 190. Теперь предлагается здѣсь о такихъ неопредѣленныхъ вопросахъ, въ которыхъ неизвлекаемыя или глухія количества только второй степени превращаются въ извлекаемыя, или въ такія, изъ которыхъ требуемой квадратовой корень найти можно, какъ на примѣръ: величину $a+12+12a^2$, которая совершеннаго корня въ себѣ не заключаетъ, сдѣлашь извлекаемою,

по

то есть найти такую величину вмѣсто x , чтобы величина $a+bx+cx^2$ была дѣйствительной квадратъ, дабы посредствомъ извѣстныхъ буквъ b и c , отъ коихъ зависитъ изображеніе неизвѣстной буквы x , можно было изъяснить корень извлекаемою величиною.

Примѣч. Во многихъ случаяхъ рѣшенія таковыхъ вопросовъ бывающъ не возможны; но ежели рѣшеніе буде нѣ возможно, то должно по крайней мѣрѣ въ изображеніи буквы x довольствоваться одною только извлекаемою величиною, и не требовать, чтобы они были еще и цѣлыя числа; ибо таковыя вопросы требуютъ особливаго разрѣшенія.

Задача I. Требуется данную неизвлекаемую величину $\sqrt{a+bx}$ превратить въ извлекаемую, то есть сдѣлать такую величиною, изъ которой бы квадратной корень найти было можно.

Рѣшен. Положимъ, $\sqrt{a+bx} = y$, то будетъ $a+bx = y^2$, откуда найдемся $x = \frac{y^2 - a}{b}$. Пусть $a = 5$, $b = 2$. Теперь надлежитъ вмѣсто y взять такое число котораго бы квадратъ былъ больше 5 ти. И отъ того произшедшее число равное $y^2 - a$ на два дѣлится могло. И такъ положимъ $y = 3, 5, 7$ и проч. то будетъ $x = \frac{9-5}{2} = 2$, или $\frac{25-5}{2} = 10$, также и $\frac{49-5}{2} = 22$ и такъ далѣе; по сей причинѣ въ первомъ случаѣ $\sqrt{a+bx} = \sqrt{5+2 \cdot 2} = \sqrt{9} = 3$; во второмъ $\sqrt{a+bx} = \sqrt{5+2 \cdot 10} = \sqrt{25} = 5$; въ третьемъ $\sqrt{a+bx} = \sqrt{5+2 \cdot 22} = \sqrt{49} = 7$ и проч.

Задача II. Найди число, котораго бы квадратъ, сложенной съ единицею, было квадратноеожъ число.

Рѣшен. I. Положимъ $\sqrt{(1+x^2)} = x + p$,
будетъ $1 + x^2 = x^2 + 2px + p^2$, или $1 - p^2$
 $= 2px$, а по раздѣленіи на $2p$ найдемъ $x =$
 $\frac{1-p^2}{2p}$, гдѣ вмѣсто p всякое число взять можно,

котораго бы квадратъ вычтенной изъ единицы на
свой удвоенной корень безъ остатка дѣлился могъ;
но какъ сіе не такъ скоро найти можно, то
положимъ $p = \frac{m}{n}$, отъ чего выйдетъ $x =$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) : \frac{2m}{n} = \left(\frac{nn - mm}{nn}\right) : \frac{2m}{n} = \frac{n^2 - m^2}{2mn} = \frac{n^2 - m^2}{2mn}.$$

Теперь положимъ $n = 2, 3, 5$ и проч. $m = 1, 1$
и проч., то найдемъ $x = \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{1^2}{5}$, и для то-
го будетъ $\sqrt{(1+x^2)} = \sqrt{(1+\frac{9}{16})} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$.
 $\sqrt{(1+x^2)} = \sqrt{(1+\frac{16}{9})} = \frac{5}{3}$; и $\sqrt{(1+x^2)} =$
 $\sqrt{(1+\frac{144}{25})} = \frac{13}{5} = 2\frac{1}{5}$ и проч.

Другимъ образомъ: Положимъ $\sqrt{(1+x^2)} =$
 $1 + \frac{mx}{n}$. Квадратъ каждой части сего уравненія

будетъ $1 + x^2 = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$; а по из-

ключеніи знаменателей и по раздѣленіи на x
найдемъ $x = \frac{2m}{n} + \frac{mmx}{nn} = \frac{2mn}{nn} + \frac{mmx}{nn}$, въ ко-

емъ по переставкѣ величинъ выйдетъ $x - \frac{mmx}{nn}$

$= \frac{2mn}{nn}$, или $\frac{nnx - mmx}{nn} = \frac{2mn}{nn}$, по естъ $nnx - mmx$

$= 2mn$, а по раздѣленіи на $nn - mm$ найдемъ

ся

ся $x = \frac{2mn}{n-m}$; по сей причинѣ $1 + x^2 = 1 + \frac{4m^2n^2}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4} = \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$, и $\sqrt{1 + x^2} = \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$. Изъ сего видно, что и $1 + \frac{(2mn)^2}{(n-m)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(n^2 - m^2)^2}$, или $(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$. И такъ ежели положимъ $n = 2, 3, 5$ и прочая, $m = 1, 1, 1$ и такъ далѣе, то будетъ также, $x = \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}$ и проч.

Задача III. Найди два числа, коихъ бы сумма квадратовъ было число совершенный квадратъ.

Рѣшен. Пусть будетъ $x^2 + y^2 = z^2$. Положи $x = 2mn$, $y = n^2 - m^2$; но какъ сумма квадратовъ $x^2 + y^2 = (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = z^2$; по отсюда найдется $z = n^2 + m^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. И такъ положимъ $m = 1$, $n = 2$, то найдется безконечное число различныхъ чиселъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$m=1, n=2, x=4, y=3, z=5$

1, 3 6 8 10

2 4 16 12 20

3 5 30 16 34 и такъ далѣе.

Задача IV. Найди два числа, коихъ бы разность квадратовъ было число квадратное.

Рѣшен. Положимъ искомья числа x, y и z , и что $z^2 - x^2 = y^2$; но какъ по предъидущей задачѣ $z = n^2 + m^2$, $x = 2mn$, $y = n^2 - m^2$, то будетъ $z^2 - x^2 = y^2 = (n^2 + m^2)^2 - (2mn)^2 = (n^2 - m^2)^2$. И такъ пусть $n = 3$, $m = 1$, то найдется безконечное число требуемыхъ величинъ

личинъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$$m=1, n=3, z=10, x=6, y=8$$

$$2 \quad 4 \quad 20 \quad 16 \quad 12$$

$$4 \quad 5 \quad 41 \quad 40 \quad 9 \text{ и такъ далѣе.}$$

Задача V. Сумму двухъ квадратныхъ чиселъ $a^2 + b^2$ раздѣлить на два другія квадратныя числа.

Рѣшен. Положимъ корень перваго требуемаго квадрата $x - a$, а корень втораго $nx - b$; то будетъ $(x - a)^2 + (nx - b)^2 = a^2 + b^2$, или $x^2 - 2ax + a^2 + n^2x^2 - 2nbx + b^2 = a^2 + b^2$; откуда найдемъ $x^2 + n^2x^2 = 2ax + 2nbx$, а по раздѣленіи на x выйдетъ $x + n^2x = 2nb + 2a$, или $x = \frac{2nb + 2a}{1 + n^2}$. Теперь надлежитъ взять вмѣсто n какое нибудь неизвлекаемое число больше 1 цы; ибо ежели возмемъ $n = 1$, то будетъ $x = b + a$, и число $x - a$ будетъ $= b$, по сей причинѣ сумму $a^2 + b^2$ двухъ данныхъ квадратовъ на два другіе квадрата раздѣлить не можно. Пусть будетъ $n = 2$, то найдемъ $x = \frac{4b + 2a}{5}$; и такъ ежели положимъ $b = 3, a = 5$, то найдемъ $x = \frac{22}{5}$, $x - a = -\frac{3}{5}$ и $nx - b = \frac{44}{5} - 3 = \frac{29}{5}$; квадраты сихъ чиселъ будутъ $\frac{9}{25}$ и $\frac{841}{25}$, коихъ сумма $\frac{850}{25} = 34$ равна суммѣ квадратовъ $9 + 25 = a^2 + b^2$.

Задача VI. Найти такое число x , которое ежели придано будетъ къ каждому изъ двухъ данныхъ чиселъ a и b , то бы произошли квадраты.

Рѣшен. По свойству вопроса $a + x$, также и $b + x$ будутъ совершенные квадраты. Положимъ

жимъ корень перваго квадрата $m+n$, а корень втораго $m-n$, то будетъ $a+x=m^2+2mn+n^2$ (А), $b+x=m^2-2mn+n^2$ (В). Вычши послѣднее уравненіе изъ перваго, останется $a-b=4mn$. Изъ сего видно, что $mn=\frac{1}{4}(a-b)$, то есть mn составляющъ одну четверть разности двухъ данныхъ чиселъ, которая заключаетъ въ себѣ двухъ множителей m и n , которыми составлены пребуемые корни $m+n$ и $m-n$; но какъ изъ уравненія А найдется $x=m^2+2mn+n^2-a$, то положи $a=35$, $b=11$, выйдетъ $a-b=24=4mn$, гдѣ $mn=\frac{24}{4}=6=3.2$. И такъ положимъ $m=3$, и $n=2$, то будетъ $m+n=5$, $m-n=1$, изъ сего найдется $x+a=25$ и $x+b=1$, по сему $x=25-a=25-35=-10$, также $x=1-b=1-11=-10$; слѣдовательно $35-10=25$, и $11-10=1$, суть числа квадратныя. Если положимъ $a=31$, $b=20$, то будетъ $a-b=11=4mn$, гдѣ $mn=\frac{11}{4}=\frac{11}{2}\times\frac{1}{2}$; и такъ положимъ $m=\frac{11}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, то пребуемыхъ квадратовъ первой корень будетъ $m+n=6$, $m-n=5$, по сему $a+x=36$, $b+x=25$, слѣдовательно $x=36-a=36-31=5$, и $x=25-b=25-20=5$, по сему $31+5=36$, и $20+5=25$ суть числа квадратныя.

Задача VII. Данную величину $\sqrt{(2zz+1)}$, въ которой z должно быть цѣлое число, сдѣлать совершеннымъ квадратомъ.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(2zz+1)}=z+p$, то будетъ $2zz+1=z^2+2pz+p^2$, откуда найдется $z^2-2zp=p^2-1$, гдѣ $z=p$
 \pm

$\pm \sqrt{(2p^2 - 1)}$. Изъ сего видно, ежели положимъ $p = 1$, то будетъ неизвлекаемое количество $z = 2$, чрезъ что найдется $\sqrt{(2z^2 + 1)} = 3$. Теперь положимъ $p = 5$, то будетъ $z = 5 + \sqrt{49} = 12$, и $\sqrt{(2z^2 + 1)} = \sqrt{289} = 17$ и такъ далѣе, надлежитъ вмѣсто p брать такое число, котораго бы удвоенной квадратъ безъ единицы было совершенное квадратное число.

Задача VIII. Полагая z цѣлымъ числомъ, сдѣлать величину $\sqrt{(3z^2 + 1)}$ совершеннымъ квадратомъ.

Рѣшен. Пусть будетъ $\sqrt{(3z^2 + 1)} = z + p$, откуда выйдетъ $3z^2 + 1 = z^2 + 2pz + p^2$, а по переставкѣ величинъ найдется $2z^2 - 2zp = p^2 - 1$, гдѣ будетъ $z = \frac{p + \sqrt{(3p^2 - 1)}}{2}$; откуда неизвлекаемое количество z найдется ежели положимъ $p = 1$, то будетъ $z = 1$, и $\sqrt{(3z^2 + 1)} = 2$. Ежели положимъ $p = 11$, то будетъ $z = \frac{11 + \sqrt{(363 - 1)}}{2} = \frac{11 + 19}{2} = 15$, и $\sqrt{(3z^2 + 1)} = \sqrt{676} = 26$, и такъ далѣе.

Задача IX. Полагая z цѣлымъ числомъ, найти совершенной корень неизвлекаемой величины $\sqrt{(5z^2 + 1)}$, въ которой корень больше $2z$.

Рѣшен. Положимъ данное количество $\sqrt{(5z^2 + 1)} = 2z + p$, откуда выйдетъ $5z^2 + 1 = 4z^2 + 4zp + p^2$, а по переставкѣ величинъ найдется $z^2 - 4zp = p^2 - 1$, изъ коего същется $z = 2p + \sqrt{(5p^2 - 1)}$. Положимъ $p = 1$, по
сему

сему будетъ $z = 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$, и $\sqrt{(5z^2 + 1)} = \sqrt{81} = 9$.

Задача X. Полагая z цѣлымъ числомъ, найти совершенной корень неизвлекаемой величины $\sqrt{6z^2 + 1}$, въ которой корень между $2z$ и $3z$ заключаться долженъ.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(6z^2 + 1)} = 2z + p$, откуда найдется $6z^2 + 1 = 4z^2 + 4zp + p^2$, а по переставкѣ величинъ выйдетъ $2z^2 - 4zp = p^2 - 1$, изъ коего по правиламъ уравненія второй степени сыщется $z = p + \frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$. Изъ

сего видно, что z больше $2p$, слѣдовательно $p > 1$; и такъ положимъ $z = 2p + q$, то изъ предъидущаго уравненія можно будетъ сдѣлать слѣдующее: $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}$ или $2p + 2q = \sqrt{(6p^2 - 2)}$, въ коемъ квадратъ первой части будетъ $4p^2 + 8pq + 4q^2 = 6p^2 - 2$, откуда найдется $2p^2 - 8pq = 4q^2 + 2$, и $p^2 - 4pq = 2q^2 + 1$, гдѣ будетъ $p = 2q + \sqrt{(6q^2 + 1)}$. Положимъ $q = 0$, то будетъ $p = 1$, $z = 2$, и $\sqrt{(6z^2 + 1)} = 5$.

Задача XI. Найти совершенной корень неизвлекаемой величины $\sqrt{(7z^2 + 1)}$, въ которой z долженъ быть цѣлое число.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(7z^2 + 1)} = m$; изъ чего видно, что $m > 2z$, по сей причинѣ принявъ $2z + p$ вмѣсто m , будетъ $7z^2 + 1 = 4z^2 + 4zp + p^2$, или $3z^2 - 4zp = p^2 - 1$; откуда найдется $z = \frac{2p + \sqrt{(7p^2 - 3)}}{3}$. Изъ сего видно, что $z > \frac{4p}{3}$, и слѣдовательно больше, не-

жели p ; и такъ положимъ $z = p + q$, отъ чего будетъ $p + 3q = \sqrt{(7p^2 - 3)}$, или $p^2 + 6pq + 9q^2 = 7p^2 - 3$, по сему $6p^2 - 6pq = 9q^2 + 3$, а по раздѣленіи на 3 выйдетъ $2p^2 - 2pq = 3q^2 + 1$, откуда найдется $p = \frac{q + \sqrt{7q^2 + 1}}{2}$. Но какъ и здѣсь $p > q$, то пусть

$p = q + r$, отъ чего выйдетъ $q + 2r = \sqrt{(7q^2 + 2)}$, а приведя обѣ части въ квадраты, будетъ $q^2 + 4qr + 4r^2 = 7q^2 + 2$, или $6q^2 - 4r = 4r^2 - 2$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $3q^2 - 2qr = 2r^2 - 1$; откуда найдется $q = \frac{r + \sqrt{(-rr - 3)}}{3}$. Изъ сего видно, что $q > r$,

для сего положимъ $q = r + s$; и такъ поставя сіе количество на мѣсто q , найдется $2r + 3s = \sqrt{(7r^2 - 3)}$, или $4r^2 + 12rs + 9s^2 = 7r^2 - 3$, а изъ сего выйдетъ $3r^2 - 12rs = 9s^2 + 3$, или $r^2 - 4r = 3s^2 + 1$, откуда найдется $r = 2 + \sqrt{(7s^2 + 1)}$. Теперь положимъ $s = 0$, то найдется $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$, $z = 3$, $m = 8$.

Примѣчан. Сей вопросъ можно рѣшить и другимъ образомъ; ибо $7z^2 + 1 = m^2$ по положенію, то изъ сего видно, что $m < 3z$; и такъ положимъ $m = 3z - p$, отъ чего выйдетъ $7z^2 + 1 = 9z^2 - 6pz + p^2$, или $2z - 6pz = -p^2 + 1$; откуда найдется $z = \frac{p + \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$. Изъ сего видно, что $z < 3p$; для сего пусть будетъ $z = 3p - q$, которое поставя на мѣсто z , будетъ $3p - 2q = \sqrt{(7p^2 + 2)}$, кои въ квадраты $9p^2 - 12pq + 4q^2 = 7p^2 + 2$, или по сокращеніи уравненія выйдетъ $p^2 - 6pq = -2q^2 + 1$, гдѣ $p = q + \sqrt{(7q^2 + 1)}$. И такъ положимъ $q = 0$, то выйдетъ $p = 1$, $z = 3$, и $m = 8$ тоже, что и прежде.

Задача XII. Неизвлечкомую величину $\sqrt{a^2 + bx + cx^2}$ сдѣлать совершеннымъ квадратомъ.

Рѣшен. Положимъ корень данного количества $= a + \frac{mx}{n}$, отъ чего выйдетъ $a^2 + bx + cx^2 = a^2 + \left(\frac{2am}{n}\right)x + \left(\frac{mm}{nn}\right)x^2$, изъ коихъ въ каждой части уничтоживъ a^2 , раздѣли на x , выйдетъ $b + cx = \frac{2am}{n} + \left(\frac{mm}{nn}\right)x$, откуда найдется $x = \frac{2amn - bnn}{nnc - mm}$. И такъ поставя сіе количество въ положенномъ корнѣ вмѣсто x , будетъ $a + \frac{mx}{n} = a + \frac{2amt - mnb}{nnc - mm} = \frac{nnc + amt - bnn}{nnc - mm} = \sqrt{a^2 + bx + cx^2}$. Если положимъ $a = 0$, то данная величина будетъ $\sqrt{bx + cx^2}$, которой квадратной корень по положенію будетъ $= \frac{mx}{n}$, по сему $bx + cx^2 = \left(\frac{mm}{nn}\right)x^2$, а по раздѣленіи на x выйдетъ $b + cx = \left(\frac{mm}{nn}\right)x$, или $bnn + cnnx = mmx$, откуда найдется $x = \frac{bnn}{mm - cnn}$. И такъ поставя сію величину вмѣсто x , будетъ $\sqrt{bx + cx^2} = \frac{bmn}{mm - cnn}$. Пусть будетъ $b=c=2$, $m=3$ и $n=2$, то будетъ $x=8$, и $\sqrt{2x + 2x^2} = 12$.

Задача XIII. Неизвлечкомую величину $\sqrt{a + bx + c^2x^2}$ сдѣлать совершеннымъ квадратомъ.

Рѣшен. Пусть будетъ $\sqrt{(a + bx + c^2x^2)} = cx + \frac{m}{n}$, то выйдетъ $a + bx + c^2x^2 = c^2x^2 + (\frac{2cm}{n})x + \frac{mm}{nn}$. Умножь каждую часть чрезъ nn , и сдѣлавъ сокращеніе, найдется $x = \frac{mm - ann}{bnn - 2cmn}$. И такъ поспавя сіе число вмѣсто x , будетъ $\sqrt{(a + bx + cx^2)} = \frac{cmm - acnn}{bnn - 2cmn} + \frac{m}{n}$, въ которомъ вмѣсто m и n для сысканія x всякое произвольное число взявъ можно.

Задача XIV. Сдѣлать совершеннымъ квадратомъ неизвлекаемую величину $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$, которую изъ двухъ другихъ множителей $(d + qx) \times (h + kx)$ представить можно.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(d + qx) \times (h + kx)} = \frac{m \cdot (d + qx)}{n}$, то по возвышеніи во вторую степень, выйдетъ $(d + qx) \cdot (h + kx) = \frac{mm(d + qx)^2}{nn}$; откуда найдется $hmn + kmnx = mm(d + qx)$, и будетъ $x = \frac{dmm - hnn}{knn - qmm}$, которую поспавя вмѣсто x , найдется требуемая величина.

Для изъясненія сего пусть будетъ сей вопросъ: найди такое число x , когда изъ удвоеннаго квадрата сего числа вычтется 2, то бы остатокъ былъ квадратъ. Представимъ сію величину изъ двухъ множителей, то естъ $2x^2 - 2 = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$, то принявъ за корень оной $\frac{m(x + 1)}{n}$, будетъ $2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = \frac{mm}{nn} \cdot (x + 1)^2$. Умножь каждую чрезъ nn , а потомъ

помѣ раздѣли чрезъ $x + 1$, выйдетъ $2mx - 2mn = mnx + mn$, откуда найдется $x = \frac{mn + 2mn}{2mn - mn}$. Ежели положимъ $m = n = 1$, то выйдетъ $x = 3$, и $2xx - 2 = 16$. Ежели $m = 3$, $n = 2$, то найдется $x = -17$; но послѣлику здѣсь въ разсужденіе берется x , то все равно, возьмется ли $x = -17$, или $x = +17$, то изъ обоихъ выйдетъ $2xx - 2 = 576 = \text{квадрату изъ числа } 24$.

Задача XV. Сдѣлать совершеннымъ квадратомъ величину $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$, состоящую изъ двухъ частей, изъ коихъ одна есть квадратъ, а другая есть произведеніе двухъ множителей.

Рѣшен. Положимъ, данного количества $a + bx + cx^2$ первая часть изобразится чрезъ $p^2 + qr$, гдѣ p, q и r производятъ величину $d + gx$; тогда надлежитъ только положить $\sqrt{(pp + qr)} = p + \frac{mq}{n}$, откуда выйдетъ $pp + qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mq^2}{nn}$. Въ семъ уравненіи уничтоживъ въ обѣихъ частяхъ p^2 и раздѣля на q , найдется $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mq}{nn}$, или $mnr = 2mnp + mnq$, откуда легко уже найдется x , какъ изъ слѣдующаго видно.

Положимъ, требуется найти такое число x , коего бы удвоенной квадратъ безъ единицы составлялъ совершенной квадратъ, то есть $2x^2 - 1$ былъ бы квадратъ. Сію величину можно представить такимъ образомъ: $xx + xx - 1 = xx + (x - 1)(x + 1)$; и такъ если положимъ

корень предложенной величины $= x + \frac{m(x+1)}{n}$,
 то будетъ $xx + (x-1)(x+1) = xx +$
 $\frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$, въ коемъ опнявъ отъ
 обѣихъ частей x^2 и потомъ раздѣля на $x+1$, и
 уничтожа дробь, выйдетъ $m x - n n = 2 m n x + m m x$
 $+ m m$, откуда найдется $x = \frac{m m + n n}{n n - 2 m n - m m}$; но
 поелику въ предложенномъ вопросѣ принимается
 въ разсужденіе только x^2 , то положишельной
 ли или отрицашельной выйдетъ x , все равно;
 слѣдственно и вмѣсто $-m$ можно поставишь
 $+m$, дабы только получишь $x = \frac{m m + n n}{n n + 2 m n - m m}$.
 Пусть будетъ $m = n = 1$, то найдется $x = 1$,
 и $2x^2 - 1 = 1$. Ежели положимъ $m = 1, n = 2$,
 будетъ $x = \frac{5}{7}$, и $2x^2 - 1 = \frac{1}{49}$; а когда возьмемъ
 ся $m = 1$ и $n = -2$, то выйдетъ $x = -5$
 или $x = +5$, а $2xx - 1 = 49$.

Ежели попребно будетъ найти такое число
 x , чѣобы $2xx + 2$ было квадратъ: то пред-
 ставя себѣ первую часть сего числа $= 4$, бу-
 детъ $2xx + 2 = 4 + 2(x+1)(x-1)$, въ ко-
 поромъ корень пусть будетъ $2 + \frac{m(x+1)}{n}$, от-
 куда найдется $x = \frac{4nn + mm + 2nn}{2nn - mm}$, чрезъ что
 вопросъ уже и разрѣшенъ. Теперь положимъ $m = 1$
 и $n = 1$, то будетъ $x = 7$, и $2xx + 2 = 100$.

Задача XVI. Найми число x , отъ кото-
 раго произшедшее количество $5xx + 3x + 7$
 было бы совершенной квадратъ.

Рѣ-

Рѣшен. Положимъ $x = z - 1$, то предложенная величина будетъ $= 5z^2 - 7z + 9$, копорой квадратной корень положимъ $= 3 - \frac{mz}{n}$; по сей причинѣ будетъ $5zz - 7z + 9 = 9 - \frac{6mz}{n} + \frac{mmzz}{nn}$, въ которомъ опнявъ опѣ обѣихъ частей 9, потомъ раздѣля чрезъ z и исключивъ дробь, будетъ $5mz - 7m = mmz - 6mn$, откуда найдется $z = \frac{7nn - 6mm}{5m - m}$, а наконецъ сыщемъ ся $x = \frac{2nn - 6mm + mm}{5nn - mm}$. И такъ ежели положимъ $m = 2$, $n = 1$, то будетъ $x = -6$, и слѣдственно $5xx + 3x + 7 = 169 =$ квадрату опѣ числа 13 пи.

Задача XVII. Найми, сколько Геркулесъ и Ахиллесъ имѣли денегъ, когда сумма квадратовъ изъ чиселъ ихъ денегъ равна суммѣ квадратовъ изъ чиселъ Петровыхъ и Павловыхъ денегъ.

Рѣшен. Положимъ число Петровыхъ денегъ $= a$, Павловыхъ b , сумма квадратовъ сихъ чиселъ будетъ $a^2 + b^2$. И такъ положимъ число Геркулесовыхъ денегъ $mx - a$, а число Ахиллесовыхъ $nx - b$, сумма квадратовъ сихъ чиселъ будетъ $m^2xx - 2amx + a^2 + n^2xx - 2bnx + b^2 = a^2 + b^2$, откуда найдется $x = \frac{2am + 2nb}{mm + nn}$. Поспавя сіе количество въ числахъ $mx - a$ и $nx - b$ вмѣсто x , вопросъ рѣшенъ будетъ.

Задача XVIII. Найми два числа пакія, чпобы разность ихъ квадратовъ равна была данному числу a .

Рѣшен. Положимъ требуемыя числа будутъ $mx + n$ и $mx - n$, разность ихъ квадратовъ будетъ $4m^2x^2 = a$; по сему $x = \frac{a}{4m^2}$. И такъ требуемыя числа, кои мы положили, будутъ $\frac{a}{4n} + n$, $\frac{a}{4n} - n$. Ежели положимъ данная разность $a = 2$: то сіи числа будутъ $\frac{1}{2n} + n$, и $\frac{1}{2n} - n$. Пусть будетъ $n = 1$, то найдутся требуемыя числа $\frac{3}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, или $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$: ибо квадратъ отрицательнаго числа будетъ такой же, какъ и опъ $\frac{1}{2}$ положительной. Ежели $n = 2$, то сіи числа будутъ $\frac{9}{4}$ и $-\frac{7}{4}$, или $\frac{9}{4}$ и $\frac{7}{4}$ и такъ да-
лѣе.

Увѣдомленіе. Дабы не увеличить подобными пред-
ложеніями сихъ листовъ, и не удалить учащагося опъ
настоящаго предмета Алгебры, то оставя сіе опредѣле-
ніе, предлагается здѣсь о фигурныхъ числахъ, за кои-
ми слѣдуютъ вышнихъ степеней уравненій. Желающій
же упражняться далѣе въ неопредѣленной Аналитикѣ,
можетъ болѣе выполнить свое удовольствіе, принявъ въ
пособіе вторую часть универсальной Арифметики Г. Эйле-
ра, которая почти вся наполнена важнѣйшими сей ча-
сти Алгебры предложеніями.

О строкахъ или порядкахъ полигонныхъ (угольныхъ) и фигурныхъ чиселъ.

§ 191. **Опредѣлен.** Строка или порядокъ,
произходящій опъ совокупленій чиселъ, изъ
коихъ одни послѣ другихъ прибываютъ или
убываютъ по одинакому закону, именуются
числами фигурными.

§ 192. Определен. Числа полигонныя или угольныя суть тѣ, кои произходятъ отъ сложенія предъидущихъ членовъ прогрессіи Ариѳметической, начинающейся отъ единицы. На примѣръ: ежели въ прогрессіи Ариѳметической 1, 2, 3, 4, 5, 6 и проч., у которой разность 1, начать складывать по порядку предъидущія числа, то произойдетъ порядокъ треугольныхъ чиселъ, какъ-то 1, 3, 6, 10, 15, 21 и проч. *)

Отъ прогрессіи Ариѳметической 1, 3, 5, 7, 9 и проч., у которой разность 2, произойдутъ числа четвероугольныя или квадратныя 1, 4, 9, 16, 25, 36 и проч. **)

Ежели въ прогрессіи Ариѳметической 1, 4, 7, 10, 13 и проч. разность 3, то произойдетъ порядокъ пятиугольныхъ чиселъ 1, 5, 12, 22, 35 и проч. ***)

Отъ прогрессіи Ариѳметической 1, 5, 9, 13, 17 и проч., у которой разность 4, произойдетъ

Ф 4

дешъ

*) Сѣи числа изобразить можно точками, составляющими треугольники какъ-то: ., . ., . . ., и проч.

**) Отъ разположенія коихъ точками произойдутъ квадраты ., . ., . . ., и прочал.

***) Что и точками изображается ., . ., . . .

и прочал.

дешъ порядокъ шестиугольныхъ чиселъ, какъ-то: 1, 6, 15, 28, 45 и проч.

и такъ далѣе.

§ 193. *Примѣчан.* Ежели положимъ число членовъ всякой Арифметической прогрессіи изъ составляющихъ угольныхъ числа $=n$; то всякое полигонное или угольное число будетъ не что иное, какъ сумма членовъ Арифметической прогрессіи, составляющей угольное число. И такъ для сысканія всякаго преугольнаго числа, выйдетъ слѣдующій образецъ: то есть всякое преугольное число $= (n+1) \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ (§ 144).

$$\text{Квадратное} = [(n-1)2+2] \frac{n}{2} = \frac{2nn}{2} = n^2.$$

$$\text{Пятиугольное} = \frac{n \cdot (3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}.$$

$$\text{Шестиугольное} = \frac{n \cdot (4n-2)}{2} = \frac{4nn-2n}{2} = 2n^2-n.$$

$$\text{Семиугольн. число} = \frac{n \cdot (5n-3)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}.$$

$$\text{VIII угольное} = \frac{n \cdot (6n-4)}{2} = \frac{6nn-4n}{2} = 3n^2-2n.$$

$$\text{IX угольное} = \frac{n \cdot (7n-5)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}.$$

$$\text{X угольное} = \frac{n \cdot (8n-6)}{2} = \frac{8nn-6n}{2} = 4n^2-3n.$$

$$\text{XI угольное} = \frac{n \cdot (9n-7)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}.$$

$$\text{XII угольное} = \frac{n \cdot (10n-8)}{2} = \frac{10nn-8n}{2} = 5n^2-4n.$$

И вообще образецъ m угольныхъ чиселъ будетъ слѣдующій: $\frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$.

Задача. I. Найми преугольное число, котораго сторона или число членовъ Арифметической прогрессіи 8.

Рѣшен. Взявъ образецъ $\frac{nn+n}{2}$ преугольнаго числа за основаніе, положи $n=8$, то будетъ преугольное число $\frac{nn+n}{2} = \frac{64+8}{2} = 36$.

Задача. II. Найми преугольное число, котораго бокъ или число членовъ Арифметической прогрессіи 7.

Рѣшен. Соображаясь съ общимъ образцемъ рѣшенія угольныхъ чиселъ, положи $m=9$, $n=7$, то будетъ девятиугольное число $\frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2} = \frac{(9-2) \cdot 49 - (9-4)7}{2} = \frac{343-35}{2} = 154$.

Прибавлен. Ежели потребно будетъ найми двухъугольное число, котораго бокъ или число членовъ 6: то положи $m=2$, $n=6$, найдется $\frac{(2-2)36-(2-4)6}{2} = \frac{12}{2} = 6$, по сему всякое двухъугольное число $=n$, слѣдовательно числа двухъугольныя суть числа натуральныя, какъ-то, 1, 2, 3, 4, и прочая.

Задача III. Дано преугольное число a , найми онаго корень или число, бокъ онаго составляющее.

Рѣшен. Положимъ искомое число x , то будетъ преугольное число $\frac{xx+x}{2} = a$, или $x^2+x=2a$, откуда найдется $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3a+1}{4}\right)}$ $= \frac{-1 \pm \sqrt{(8a+1)}}{2}$. Пусть будетъ $a=15$, то най-

дётся $x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$, искомое число.

Задача IV. Дано пятиугольное число a , найди онаго корень или бокъ.

Рѣшен. Общій образецъ пятиугольныхъ чиселъ есть $\frac{3xx-x}{2} = a$, а по умноженіи на 2 выйдетъ $3x^2 - x = 2a$, которое раздѣля на 3, будетъ $x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{2a}{3}$, откуда найдётся $x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{(\frac{2a}{3} + \frac{1}{36})} = \frac{1 \pm \sqrt{(24a+1)}}{6}$. Пусть будетъ $a = 35$, то найдётся $x = \frac{1 \pm \sqrt{(840+1)}}{6} = \frac{1+29}{6} = 5$.

Задача V. Извѣстно m угольное число a , найди корень или число, составляющее онаго бокъ.

Рѣшен. По общему образцу, m угольное число будетъ $\frac{(m-2)xx - (m-4)x}{2} = a$, или $(m-2)x^2 - (m-4)x = 2a$, а по раздѣленіи на $m-2$ выйдетъ $x^2 - (\frac{m-4}{m-2})x = \frac{2a}{m-2}$, откуда найдётся $x = \frac{m-4}{(m-2)^2} \pm \sqrt{\frac{2a}{m-2} + (\frac{m-4}{m-2})^2}$.

§ 194. **Опредѣлен.** Фигурныя числа разубѣются слѣдующимъ образомъ: (А)

Числа фигурныя	постоянныя или 1 го порядка	1	1	1	1	1
	натуральн. или 2 го порядка	1	2	3	4	5
	треугольн. или 3 го порядка	1	3	6	10	15
	треугол. пирамидъ или 4го поряд.	1	4	10	20	35
	пятого порядка - -	1	5	15	35	70
	шестого порядка - -	1	6	21	56	126
	и прочая - -	1	7	28	84	210

изъ

изъ коихъ всякая горизонтальная строка изображаетъ тѣхъ самыя числа, какъ и сходственная ей перпендикулярная, и каждой членъ фигурныхъ чиселъ всякой строки есть сумма членовъ предъидущей строки, на примѣръ: претій членъ 6, третьяго порядка есть сумма трехъ первыхъ членовъ $1+2+3$ втораго порядка. Изъ сего удобно видѣть можно, что числа втораго порядка рождаются отъ сложенія единицъ; числа третьяго порядка производятся отъ непрерывнаго сложенія чиселъ второй строки, какъ-то $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ и проч.; числа четвертаго порядка составляются изъ чиселъ третьяго порядка, то есть $1+3=4$, $1+3+6=10$, $1+3+6+10=20$ и такъ далѣе.

§ 195. *Опредѣлен. Показатель порядка* есть число, означающее число горизонтальныхъ строкъ.

§ 196. *Теорема.* Сумма всехъ членовъ всякаго порядка горизонтальной строки, равна произведенію изъ послѣдующаго члена послѣдняго термина той же строки и числа членовъ, раздѣленному на показателя порядка.

Доказат. Для изслѣдованія сей истинны, возьмемъ въ разсужденіе пятой порядокъ горизонтальной строки; то сумма 4 хъ членовъ сей строки будетъ $= \frac{70 \times 4}{5} = 56 = 1+5+15+35$, то есть, когда послѣдующій членъ 70 послѣдняго термина 35 умножится числомъ членовъ 4, а потомъ раздѣлится на показателя порядка

дка 5, по частное будетъ сумма 4 хъ членовъ
пятого порядка. Но дабы доказать оное вообще,
по пусть буквы приложенной здѣсь таблицы В
означать будутъ числа таблицы

a	b	c	f	g
h	i	l	m	k
p	s	r	q	t
u	x	y	z	v

А; и для того положимъ, пока-
зашель $1=e$ означать первую го-
ризонтальную строку, число чле-
новъ $n=4$, по будетъ $f+c+b$

(В)

$$\begin{aligned}
 +a &= \frac{g \cdot n}{e} = m, \quad c + b + a = \frac{f \cdot (n-1)}{e} = l, \quad b + a \\
 &= \frac{c \cdot (n-2)}{e} = i, \quad a = \frac{b \cdot (n-3)}{e} = h, \quad 0 = \frac{a \cdot (n-n)}{e} = 0, \quad \text{по-} \\
 \text{сему} \quad &\frac{g \cdot n}{e} + \frac{f \cdot (n-1)}{e} + \frac{c \cdot (n-2)}{e} + \frac{b \cdot (n-3)}{e} + \frac{a \cdot (n-n)}{e} = m \\
 +l+i+h+0, \quad \text{или} \quad &\frac{n}{e} (g+f+c+b+a) - \frac{f}{e} - \frac{2c}{e} \\
 - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} &= m+l+i+h+0: \text{ но } -\frac{f}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = \\
 \left. \begin{array}{r} -f-c-b-a \\ -c-b-a \\ -b-a \\ -a \\ \hline e \end{array} \right\} &= \frac{-m-l-i-h}{e};
 \end{aligned}$$

также и $g+f+c+b+a=k$ (по свойству фи-
гурныхъ чиселъ), по сему $\frac{k \cdot n}{e} - \left(\frac{m+l+i+h}{e} \right) = m+l$
 $+i+h$, а по умноженіи на e будетъ $n \cdot k - 1 \cdot (m$
 $+l+i+h) = (m+l+i+h)e$, въ коемъ по пере-
ставкѣ членовъ выйдетъ $n \cdot k = e(m+l+i+h)$
 $+ 1 \cdot (m+l+i+h) = (e+1) \cdot (m+l+i+h)$, а по
раздѣленіи на $e+1$, выйдетъ $\frac{n \cdot k}{e+1} = m+l+i+h$;
но какъ $e+1=2$ естъ показашель второй стро-
ки, k послѣдующій членъ послѣдняго термина

m той же строки, по сей причинѣ сумма членовъ вшорато порядка равна произведенію изъ послѣдующаго члена послѣдняго штермина и числа членовъ, раздѣленному на показателя порядка.

Такимъ же образомъ докажется и сумма членовъ шрепьяго порядка; ибо въ семъ случаѣ будетъ $m + l + i + h = \frac{k \cdot n}{e + 1} = q$, $h + i + l = \frac{m \cdot (n - 1)}{e + 1} = r$, $i + h = \frac{l \cdot (n - 2)}{e + 1} = s$, $h = \frac{i \cdot (n - 3)}{e + 1} = p$, $0 = \frac{h \cdot (n - n)}{e + 1} = 0$; по сему $\frac{k \cdot n}{e + 1} + \frac{m \cdot (n - 1)}{e + 1} + \frac{l \cdot (n - 2)}{e + 1} + \frac{i \cdot (n - 3)}{e + 1} + \frac{h \cdot (n - n)}{e + 1} = q + r + s + p + 0$, или $\frac{n}{e + 1} \times (k + m + l + i + h) - \left(\frac{m + 2l + 3i + nh}{e + 1} \right) = q + r + s + p$; но $\frac{-m - 2l - 3i - nh}{e + 1} =$

$$\left. \begin{array}{r} -m - l - i - h \\ -l - i - h \\ -i - h \\ -h \\ \hline e + 1 \end{array} \right\} = \frac{-q - r - s - p}{e + 1},$$

и $k + m + l + i + h = t$; по сему $\frac{n \cdot t}{e + 1} - \left(\frac{q + r + s + p}{e + 1} \right) = q + r + s + p$, а по умноженіи чрезъ $e + 1$, будетъ $n \cdot t - (q + r + s + p) = (e + 1) \cdot (q + r + s + p)$, въ коемъ переславя члены, найдемся $n \cdot t = (e + 1) \cdot (q + r + s + p) + 1 \cdot (q + r + s + p) = (e + 2) \cdot (q + r + s + p)$, а по раздѣленіи на $e + 2$ выйдетъ $\frac{n \cdot t}{e + 2} = q + r + s + p = 2 =$ суммѣ членовъ

новѣ претяго порядка, гдѣ показатель $e + 2 = 3$ означаетъ претью горизонтальную строку. Такимъ же образомъ докажется помянутое свойство и прочихъ порядковъ.

Прибавленіе. Дабы найти сумму чиселъ какого нибудь порядка, положимъ число членовъ $= n$, сумма ихъ X , послѣдній членъ D , послѣдующій сего члена d , показатель порядка e : то по свойству предвѣдущаго предложенія будетъ $X = \frac{n \cdot d}{e}$, и $X - D = \frac{D \cdot (n-1)}{e}$, откуда най-

$$\text{дется } X = \frac{D \cdot (n-1)}{e} + D = \frac{Dn - D + eD}{e} = D \cdot \frac{(n-1+e)}{e}.$$

И такъ положимъ, что $e=1$ означаетъ первый порядокъ, въ которомъ также и $D=1$, то будетъ $X = \frac{nD}{e} = \frac{nD}{1} = \frac{n}{1} =$ суммѣ членовъ первого порядка. Теперь поставь $\frac{n}{1}$ въ общемъ образцѣ

$$X = D \cdot \left(\frac{n-1+e}{e} \right) \text{ вмѣсто послѣдняго члена } D \text{ второ-}$$

$$\text{раго порядка, и } 2 \text{ на мѣсто } e, \text{ то выйдетъ } X = \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n-1+2}{2} \right) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} =$$

суммѣ членовъ второго порядка, или послѣдній членъ претяго порядка, то есть преугольное число. Еслижъ для изобрѣшенія суммы членовъ претяго порядка поставиши въ общемъ образцѣ $X = D \cdot \left(\frac{n-1+e}{e} \right)$

$$\text{вмѣсто послѣдняго члена } D \text{ количество } \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

$$\text{и } 3 \text{ на мѣсто } e, \text{ то сумма членовъ претяго}$$

$$\text{порядка, или послѣдній членъ четвертаго по-}$$

$$\text{рядка будетъ } X = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}, \text{ которое будетъ}$$

общимъ

общимъ правиломъ для ссыскиванія чиселъ, составляющихъ треугольныя пирамиды.

Равнымъ образомъ найдется общее правило для познанія суммы членовъ четвертаго порядка, или послѣдняго члена пятаго порядка $\frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{3}$ и прочая.

Другое разположеніе предписанныхъ порядковъ или фигурныхъ чиселъ.

§ 197. Поелику перпендикулярныя строки фигурныхъ чиселъ представляютъ самыя шѣжѣ числа, что и сходственные горизонтальныя; слѣдственно на такихъ же свойствахъ и основаніе свое имѣютъ, то есть сумма всѣхъ членовъ всякой перпендикулярной строки равна произведенію изъ послѣдующаго члена послѣдняго термина и числа членовъ, раздѣленному на показателя порядка. И такъ ежели помнупыя фигурныя числа таблицы А разположатся такимъ образомъ, что всѣ перпендикулярныя строки

1	1	(С)	останутся въ помѣ же положеніи, а				
1	2	1	первой членъ претретьяго порядка таб-				
1	3	3	лицы А поставится проптивъ впо-				
1	4	6	4	1	раго члена ввторой строки; пер-		
1	5	10	10	5	1	вой членъ четвертаго поряд-	
1	6	15	20	15	6	1	ка проптивъ ввторого члена

ка пропавъ втораго члена третьей строки, и такъ далѣе, то уже въ семъ случаѣ горизонтальныя строки не будутъ со-

со-

согласны съ перпендикулярными, какъ въ первомъ разположеніи таблицы А *).

(D) Для общаго рѣшительнаго образца горизонтальной строки, или все равно, по разположенію сей таблицы перпендикулярной строки h, i, l, m, k и проч. въ прежнемъ образцѣ найдено было, что сумма членовъ первого порядка $a+b+c+f+g$ или послѣдующій членъ k горизонтальной строки $= \frac{n}{1}$; сумма членовъ второй перпендикулярной строки $h+i+l+m+k = \frac{n \cdot n-1}{2}$, которая здѣсь не будетъ равна послѣднему члену q третьей строки: ибо число членовъ сего порядка не n , но $n-1$, и потому сей послѣдній членъ равенъ суммѣ членовъ второй строки безъ послѣдняго k . И такъ дабы найти сумму членовъ второй строки безъ послѣдняго, то поставъ въ общемъ образцѣ $X = \frac{Dn}{e}$ величину $\frac{n}{1}$ вмѣсто D , $n-1$ вмѣсто n , и 2 на мѣсто e , то будетъ $X = 1 \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} =$ суммѣ членовъ второй строки безъ послѣдняго k , или послѣдній членъ q третьей строки. Послѣдній членъ u четвертой перпендикулярной строки равенъ суммѣ членовъ третьей строки безъ послѣдняго q ,

II

*) Въ предложенной здѣсь таблицѣ каждая перпендикулярная строка изображена тѣмижъ самыми буквами, какими въ таблицѣ В означены горизонтальныя; слѣдовательно здѣсь число членовъ n означаетъ число перпендикулярныхъ строкъ, а показатель e число горизонтальныхъ.

и для того въ образцѣ $X = \frac{D \cdot n}{e}$ поставь $\frac{n}{2} X$ $\frac{n-1}{2}$ вмѣсто D , $n-2$ вмѣсто n , и 3 на мѣсто e , то сумма членовъ третьей строки безъ послѣдняго, или величина послѣдняго члена u , четвертаго порядка будетъ $X = \frac{n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}}$. Равнымъ образомъ найдется послѣдній членъ 5 пятаго порядка $= \frac{n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4}}$ и такъ далѣе. Но какъ n представляеть произвольное число членовъ перваго порядка, по сей причинѣ величина всякой горизонтальной строки сего послѣдняго разположенія найдена быть можетъ.

§ 198 Прибавлен. Если величину $a+b$ возвысить во вторую, 3 ю, 4, 5 и проч. степень, и поставивъ сіи возвышенія одни подъ другія, то выйдетъ слѣдующая таблица: изъ разполо-

a	b	женія которой видно, что предпо-		
a^1	$2ab$	b^2	ящія числа величинъ, въ сей	
a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3	таблицѣ поставленныхъ,
a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	b^4 продолжаются такимъ
a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$ b^5 же порядкомъ, какъ

и числа таблицы C . И такъ если показателя какой нибудь степени изобразимъ вообще буквою n , то предстоящее втораго члена какой нибудь горизонтальной строки будетъ $= \frac{n}{1}$, предстоящее третьяго члена той же строки будетъ $\frac{n \cdot \frac{n-1}{2}}$, предстоящее четвертаго чле-

на $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$, предстоящее пятого $= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4}$ и такъ далѣе. Буквы, изображающія какуюнибудь горизонтальную строку, въ разсужденіи показателя подвержены слѣдующему закону: $a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3$ и такъ далѣе; слѣдовательно всякая горизонтальная строка, изображающая какуюнибудь степень, вырази́тся чрезъ $a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3$ и проч. и то же самое есть, что и въ § 62 показано было.

Задача I. Найти число ядеръ преугольной кучи ABCD, у которой бокъ основанія АВ имѣетъ 7 ядеръ. **Чертежъ I.** фигура 1 я.

Рѣшен. Поелику каждое число четвертаго порядка фигурныхъ чиселъ изображаетъ число преугольныхъ пирамидъ, кои производятъ отъ непрерывнаго сложенія преугольныхъ чиселъ; по сему сумма преугольныхъ чиселъ, изъ 7 членовъ состоящихъ, есть послѣдній, то есть седьмой членъ четвертаго порядка, или число, составляющее преугольную пирамиду, у которой бокъ основанія АВ имѣетъ 7 ядеръ. И такъ положимъ число членовъ шестяго порядка $7=n$, искомое число ядеръ x , то по свойству преугольныхъ чиселъ, сумма ихъ или седьмой членъ четвертаго порядка, то есть пребуемое число ядеръ, будетъ $x = \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{3}\right) = \left(\frac{nn+n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{3}\right) = \left(\frac{nn+n}{2}\right) \frac{n}{3} + \left(\frac{nn+n}{2}\right) \frac{2}{3} = \frac{nnn + 3nn + 2n}{6}$

$\frac{=343+147+14}{6}=\frac{504}{6}=84$ числу ядеръ преугольной пирамиды.

Слѣдств. Поелику всякое преугольное число, то есть сумма прогрессии, у которой разность $=1$, изображено быть должно вообще чрезъ $(n+1)\frac{n}{2}=\frac{nn+n}{2}$ (§ 193); изъ рѣшеніяжъ предвѣдущаго вопроса видно, что число ядеръ всякой преугольной пирамиды $=\left(\frac{nn+n}{2}\right)\frac{n}{3}+\left(\frac{nn+n}{2}\right)\frac{2}{3}=\left(\frac{nn+n}{2}\right).\left(\frac{n+2}{3}\right)$, то изъ сего удобно разумѣть можно, что для сысканія числа ядеръ преугольной пирамиды, надлежитъ сперва найти преугольное число основанія, изъ ядеръ составленное, котораго бокъ есть число членовъ, а потомъ умножить оное чрезъ одну третью числа ядеръ, составляющихъ бокъ основанія, и къ сему произведенію придашь двѣ трети преугольнаго основанія, изъ ядеръ составленнаго, то есть $\left(\frac{nn+n}{2}\right)\frac{n}{3}+\left(\frac{nn+n}{2}\right)\frac{2}{3}=\left(\frac{49+7}{2}\right).\frac{7}{3}+\left(\frac{49+7}{2}\right).\frac{2}{3}=28\times\frac{7}{3}+28\times\frac{2}{3}=65\frac{1}{3}+18\frac{2}{3}=84$ *).

Прибавлен. Дабы найти общее правило для изобрѣшенія по извѣстному числу членовъ суммы квадратныхъ чиселъ, или числа ядеръ четверо-

Х 2

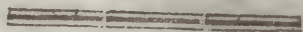
пверо-

*) Или найдя число ядеръ преугольнаго основанія, потомъ придавъ 2 ядра къ числу ядеръ, бокъ основанія составляющихъ, умножь одною третью сей суммы число ядеръ преугольнаго основанія, будешь имѣть число ядеръ преугольной пирамиды.

пшвероугольной пирамиды, у которой основаніе естъ квадратъ; то прежде сего надлежитъ себѣ представить, что на пшеугольномъ сдѣланномъ изъ ядеръ основаніи, которое приставлено къ наклоненной плоскости CD (Чертеж. I. фигура 2.) сложена прехсторонная призма, у которой число ядеръ въ длинѣ AC однимъ ядромъ больше числа ядеръ бока AB, пшеугольнаго основанія ABE; но какъ число ядеръ сей призмы равно произведенію изъ пшеугольнаго числа ядеръ ABE и числа ядеръ содержащихся въ длинѣ бока AC, то положивъ число ядеръ бока AB $=n$, число ядеръ бока AC будетъ $=n+1$, посему число ядеръ призмы ACDEB будетъ $=\left(\frac{nn+n}{2}\right) \cdot (n+1) = \frac{nnn+2nn+n}{2}$. Теперь вообразимъ себѣ, что прехсторонная призма ACDEB раздѣлена плоскостію по линіи ЕС, то опъ сего раздѣленія произойдутъ двѣ пирамиды, изъ коихъ одна прехсторонная CDE, у которой основаніе естъ пшеугольникъ изъ ядеръ сослпавленный, находящейся у плоскости CD, а другая чешверостпоронная ACEB; но какъ по предъидущему слѣдствію число ядеръ пшеугольной пирамиды CDE $=\left(\frac{nn+n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{nn+n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{nnn+3nn+2n}{6}$, то вычтя сіе число ядеръ изъ числа ядеръ, составляющаго прехсторонную призму ACDEB, останется число ядеръ чешверостпоронной пирамиды ABEC, то естъ $\frac{nnn+2nn+n}{2} - \left(\frac{nnn+3nn+2n}{6}\right) = \frac{3nnn+6nn+3n}{6} - \left(\frac{nnn+3nn+2n}{6}\right) = \frac{2nnn+3nn+n}{6} = \left(\frac{nn+n}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} + \left(\frac{nn+n}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Изъ

Изъ сего явствуетъ, что для сысканія суммы квадратныхъ чиселъ, или числа ядеръ четвероспоронной пирамиды, надлежитъ число ядеръ треугольника АЕВ, умножить чрезъ $\frac{2}{3}$ числа ядеръ, составляющаго бокъ АВ или АЕ, а потомъ къ сему произведенію прибавить одну третью числа ядеръ треугольника АЕВ. Положимъ, бокъ АВ основанія СВА четвероспоронной пирамиды имѣетъ 5 ядеръ $=n$, то число всѣхъ ядеръ сей пирамиды будетъ $(\frac{n+n}{2}) \cdot \frac{2n}{3} + (\frac{n+n}{2}) \cdot \frac{1}{3} = (\frac{2n+n}{2}) \cdot \frac{10}{3}$
 $+ (\frac{2n+n}{2}) \cdot \frac{1}{3} = 15 \times \frac{10}{3} + 15 \times \frac{1}{3} = 50 + 5 = 55.$

Слѣдствіе. Изъ сего удобно видѣть можно, что для изобрѣщенія числа ядеръ призматической пирамиды DABCGH (Чертеж. I. Фиг. 3), должно сперва найти число ядеръ четвероспоронной пирамиды ECBFG; потомъ найдя число ядеръ треугольника ADH, умножить оное разностию числа ядеръ бока АВ и ВС, то есть числомъ ядеръ, составляющимъ бокъ АН наклоненной трехсторонной призмы ADEGF, коихъ общая сумма съ квадратною пирамидою будетъ равна числу ядеръ призматической пирамиды, у которой основаніе есть прямоугольникъ ABCD, изъ ядеръ составленной.



О уравненіяхъ вышнихъ степеней.

§ 199. **Опредѣлен.** Уравненіе третьей степени или кубическое есть то, въ которомъ неизвѣстная величина третьей степени; а четвертой степени или биквадратное есть то, въ коемъ неизвѣстная величина четвертой степени

пени, на примѣръ: кубическое $x^3 + bx = cd$; четвертой степени $x^4 - ax^2 + bx = md$, и проч.

§ 200. *Опредѣлен.* Неизвѣстная величина именуется *корнемъ уравненія*.

§ 201. *Примѣчан.* Уравненіе всякой степени превращается въ 0, когда всѣ члены второй части поставятся въ первую, на примѣръ: $x^2 + dx = c - ax$ будетъ $x^2 + dx + ax - c = 0$; также $x^2 - ax = bx$ превратится въ $x^2 - ax - bx = 0$.

§ 202. *Опредѣлен.* Полное кубическое или четвертой степени уравненіе есть то, въ которомъ сверхъ большой степени неизвѣстной величины находясь другія всѣ нижней степени по порядку, на примѣръ: $x^3 - bx^2 + cx + d = 0$, или $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ и прочая.

Теперь надлежитъ разсмотрѣть произхожденіе и свойство уравненій, начиная со второй степени по порядку и прочихъ степеней.

§ 203. Если два уравненія $x = 2$, и $x = 3$, превращаясь въ 0, то есть $x - 2 = 0$, и $x - 3 = 0$, умноживъ одно чрезъ другое, то выйдетъ уравненіе $(x - 2)(x - 3) = 0$, или $x^2 - 5x + 6 = 0$, составленное изъ двухъ множителей, заключающее въ себѣ два корня $x = 2$ и $x = 3$. Если будетъ $x = a$, $x = b$, $x = c$, или $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, то умноживъ всѣ сіи при уравненія между собою, произойдетъ уравненіе $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$ (A), составленное изъ трехъ множителей, и потому заключаетъ въ себѣ три корня. Когда возьмется чепыре множителя

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, или $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, то отъ умноженія сихъ уравненій между собою произойдетъ уравненіе четвертой степени $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d)=0$, или

$$\left. \begin{array}{l} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd \\ - bx^3 + acx^2 - abdx \quad - - \\ - cx^3 + bcx^2 - acdx \quad - - \\ - dx^3 + adx^2 - bcdx \quad - - \\ \quad + bdx^2 \quad - - - - \\ \quad + cdx^2 \quad - - - - \end{array} \right\} = 0 (B).$$

Изъ сего и предъидущихъ уравненій видно : I) что всякое уравненіе столько имѣетъ корней, сколько въ уравненіи множителей заключается, или сколько показатель степени единицъ въ себѣ имѣетъ. II) Если вмѣсто неизвѣстной величины x поставится какая нибудь изъ извѣстныхъ, то сумма всѣхъ членовъ уравненія будетъ $=0$; ибо если въ первомъ множителѣ $x-a$ кубическаго уравненія А поставится a вмѣсто x , то будетъ $x-a=a-a=0$, и уравненіе изобразится такимъ образомъ : $0 \cdot (x-b) \cdot (x-c) = 0$. III) Во всякомъ уравненіи предъстоящее втораго члена равно суммѣ всѣхъ корней съ противнымъ знакомъ; поелику корни уравненія А или В суть $x=c$, $x=b$, $x=c$ и проч. изъ коихъ каждой по пересавкѣ членовъ превращенъ въ $x-a=0$, $x-b=0$ и проч. слѣдственно въ уравненіи А предъстоящее втораго члена $-(a+b+c)=-a-b-c$. IV) Предъстоящее третьяго члена равно суммѣ произведеній, изъ корней умноженныхъ по два. Еслили

же уравненіе будетъ большей степени, то предстоящее четвертаго члена будетъ равно суммѣ произведеній изъ корней, по три между собою умноженныхъ, съ проотивнымъ знакомъ; предстоящеежъ пятаго члена равно суммѣ произведеній изъ корней, умноженныхъ по чепыре, и такъ далѣе; послѣдній же членъ всякаго уравненія равенъ произведенію всѣхъ корней.

И такъ ежели кубическое уравненіе А сравнимъ съ уравненіемъ $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, то найдется $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $r = abc$; есплижъ сравнимъ четвертой степени уравненіе В съ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + t = 0$, то найдется $p = a + b + c + d$, $q = ab + ac + bc + ad + bd + cd$, $r = abc + abd + acd + bcd$, $t = abcd$.

Изъ предписанныхъ уравненій удобно видѣть можно, ежели всѣ корни уравненія будутъ положительныя, тогда знаки членовъ одинъ послѣ другаго перемѣняющся съ $+$ на $-$ и съ $-$ на $+$, то есть сполько перемѣнъ знаковъ будетъ въ уравненіи, сколько въ немъ заключается положительныхъ корней.

§ 204. Ежели при уравненія $x = 2$, $x = -3$, $x = -5$, или $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 5 = 0$, умножашся между собою, то произойдетъ уравненіе $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$, въ кошоромъ, какъ видно, заключается одна сполько перемѣна знаковъ втораго и претьяго членовъ, другъ за другомъ слѣдующихъ, и два повпоренія одного и того же знака, одинъ послѣ другаго сряду поставленныхъ, какъ-то первой и второй члены съ

съ знакомъ $+$, а третій и четвертой съ знакомъ $-$; поелику уравненіе заключаетъ въ себѣ одинъ корень положительной и два отрицательныхъ.

Изъ предписаннаго разумѣть можно, когда всѣ члены уравненія будутъ положительные, то всѣ корни онаго будутъ отрицательные; поелику они въ соспавленіи уравненія пріемаются съ прошивными знаками $+$, и для того опъ взаимнаго ихъ умноженія выходятъ всѣ члены уравненія положительные.

§ 205. Теперь пусть будутъ одни корни положительные а другіе отрицательные, какъ на примѣрѣ $x=a$, $x=-b$ и проч. или $x-a=0$, $x+b=0$ и проч., то изъ сихъ двухъ множителей соспавится слѣдующее уравненіе:

$$\left. \begin{aligned} &xx - ax - ab \\ &+ bx \end{aligned} \right\} = 0,$$

въ копоромъ ежели положимъ $a > b$, то первой членъ будетъ положительной, а два другіе отрицательные; по сему будетъ въ немъ одна только переменна знаковъ и одно повпореніе того же знака. Естлижъ положимъ $a < b$, то два первые члена будутъ положительные, а третій отрицательной, и слѣдственно въ немъ также одна переменна знаковъ и одно повпореніе одного и того же знака послѣдуетъ. Ежели будетъ $a = b$, то произойдетъ уравненіе $xx - ax - ab = 0$, въ копоромъ, какой бы изъ знаковъ, поставленныхъ предъ нулемъ, взявъ ни былъ, всегда будетъ одна переменна знаковъ, и одно повпореніе того же знака; слѣдовательно въ

предложенномъ уравненіи одинъ корень положительной, а другой отрицательной.

Положимъ еще два корня положительныхъ и одинъ отрицательной, на примѣръ: $x=a$, $x=b$, $x=-c$, или $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, то отъ умноженія оныхъ между собою произойдетъ слѣдующее уравненіе:

$$\left. \begin{array}{l} x^3 - \dots x^2 + abx + abc \\ -bx^2 - ax - \dots \\ +cx^2 - bcx - \dots \end{array} \right\} = 0,$$

въ которомъ ежели положимъ, что $a+b > c$, то второй и третій члены будутъ отрицательные, по сему въ уравненіи будетъ двѣ переменны знаковъ, и одно повтореніе того же знака. Еслижъ положимъ, что $a+b < c$, то второй членъ будетъ положительной, а третій отрицательной, въ которомъ уравненіи также будетъ двѣ переменны знаковъ и одно повтореніе того же знака. Наконецъ ежели $a+b=c$, то второй членъ будетъ $\pm 0 \cdot x^2$, а третій отрицательной, въ которомъ, какой бы знакъ второго члена взялъ ни былъ, всегда будетъ двѣ переменны знаковъ и одно повтореніе того же знака послѣдуетъ; поелику въ уравненіи заключается два знака положительныхъ и одинъ отрицательной. Изъ сего вообще заключить можно, что во всякомъ уравненіи столько будетъ отрицательныхъ корней, сколько будетъ повтореній одинакихъ знаковъ, и столько положительныхъ, сколько будетъ переменъ разныхъ знаковъ, одинъ послѣ другаго слѣдующихъ. Изъ тогожъ явствуетъ, ежели въ уравненіи не будетъ второго члена, то въ немъ сумма положительныхъ корней

ней равна суммѣ отрицательныхъ, то есть $c = -(a+b)$, и проч.

Когда уравненіе не имѣетъ третьяго члена, то сумма произведеній изъ положительныхъ корней, соединенная съ отрицательными произведеніями, составляетъ 0; но ежели въ уравненіи не находится послѣдняго члена, то одинъ корень такого уравненія $= 0$; слѣдственно такое уравненіе можетъ быть раздѣлено на $x = 0$, какъ на примѣръ: уравненіе $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$ раздѣля на x , выйдетъ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Изъ вышеписанныхъ предложеній удобно видѣть можно, ежели всѣ корни будутъ отрицательные, то всѣ члены уравненія будутъ имѣть знакъ $+$; послѣдній членъ уравненія всегда будетъ $+$, ежели число положительныхъ корней уравненія будетъ чотное; ибо чотное число знаковъ $-$, умноженныхъ между собою, производятъ $+$. Напротивъ того послѣдній членъ уравненія всегда будетъ $-$, ежели число положительныхъ корней будетъ не чотное; потому что не чотное число знаковъ $-$, умноженныхъ между собою, производятъ $-$.

Ежели въ уравненіи одинъ или болѣе изъ корней будетъ неизвлекаемой, то оной долженъ быть дѣлитель послѣдняго члена; поелику сей членъ есть произведеніе всѣхъ корней уравненія.

Изъ сего явствуетъ, что для изобрѣшенія какого нибудь корня надлежитъ найти всѣхъ дѣлителей послѣдняго члена, изъ коихъ пошъ имѣетъ

имѣетъ быть корнемъ уравненія, которой поставя на мѣсто x , данное уравненіе превратится въ 0, или присоединя его къ x съ знакомъ $+$ или $-$, можеть быть дѣлителемъ уравненія, на примѣръ: пусть будетъ уравненіе $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, въ которомъ, какъ видно, двѣ переменны знаковъ и одно повтореніе того же знака, и слѣдственно заключается въ немъ два корня положительныхъ и одинъ отрицательной; дѣлители послѣдняго члена 24 суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (§ 32). И такъ положимъ $x = 1$, то предложенное уравненіе изобразится чрезъ $1 - 3 - 10 + 24 = +12$, по сей причинѣ 1 корнемъ быть не можеть; теперь положимъ $x = 2$, то помянутое уравненіе превратится въ $8 - 12 - 20 + 24 = 0$; по сему корень сего уравненія $x = 2$; слѣдовательно $x - 2$ долженъ быть дѣлитель предложеннаго уравненія. И такъ раздѣля данное уравненіе $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ на $x - 2$, частное будетъ $x^2 - x - 12 = 0$, или $x^2 - x = 12$, изъ котораго по правиламъ второй степени уравненія найдется $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{12 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \frac{3}{2} = 4$, и $x = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$; и такъ найденные корни суть $x = 2$, $x = 4$ и $x = -2$, то есть два изъ нихъ дѣйствительные, и одинъ отрицательной.

Въ уравненіи $x^3 = 27$ или $x^3 - 27 = 0$ найдется $x = \sqrt[3]{27} = 3$; но дабы найти прочіе корни, то раздѣли $x^3 - 27 = 0$ на $x - 3$, частное будетъ $x^2 + 3x + 9 = 0$, или $x^2 + 3x = -9$, откуда найдется $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$; слѣдовательно

ИСКОМЫЕ

искомые при корня данного уравненія суть $x=3$, $x=\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}$, $x=\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}$, изъ коихъ одинъ дѣйствительной, а прочіе мнимые. Но дабы о семъ увѣриться, шо умножь каждой корень изъ двухъ послѣднихъ кубично, выйдетъ I) $(\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}) \times (\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}) \times (\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}) = \frac{54+162}{8} = \frac{216}{8} = 27$. II) $(\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}) \times (\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}) \times (\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}) = \frac{54+162}{8} = \frac{216}{8} = 27$.

§ 206. Наблюденіе. При сыскиваніи корней надлежитъ быть предстоящему перваго члена $=1$, и чтобы прочіе члены никакихъ дробей не имѣли.

§ 207. Задача. Въ данномъ уравненіи уничтожить дроби.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{e}{m} = 0$. Положимъ неизвѣстная величина $x = \frac{y}{n}$ *), шо данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{y^3}{n^3} + \frac{ay^2}{bn^2} + \frac{cy}{dn} + \frac{e}{m} = 0$. Теперь умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ n^3 , выйдетъ $y^3 + \frac{na}{b}y^2 + \frac{n^2cy}{d} + \frac{n^3e}{m} = 0$, и такъ положимъ $n = bdm$, шо изъ сего уравненія выйдетъ $y^3 + am^2y^2 + b^2m^2cdu + b^3d^3m^2e = 0$ безъ дробей. Изъ чего видно, что количество n должно

*) Здѣсь n полагается такое число, которое бы на каждого знаменателя изъ дробей, въ уравненіи заключающихся, безъ остатка дѣлилось могло.

жно быть равно произведенію изъ знаменателей всѣхъ дробей уравненія.

§ 208. *Задача.* Въ данномъ уравненіи уничтожитъ предстоящее перваго члена.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $ax^3+bx^2+cx+d=0$; раздѣли каждой членъ сего уравненія на предстоящее a перваго члена, будетъ $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{cx}{a}+\frac{d}{a}=0$; потомъ для уничтоженія дробей положи $x=\frac{y}{a}$, выйдетъ уравненіе $y^3+by^2+acy+a^2d=0$, въ которомъ первой членъ предстоящаго не имѣетъ.

§ 209. *Задача.* Къ корню уравненія придать данную величину e .

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе x^3+ax^2-bx-m . Положимъ $x+e=y$, или $x=y-e$, по сему выйдетъ $x^3=y^3-3ey^2+3e^2y-e^3$, $ax^2=ay^2-2aey+ae^2$, $-bx=-by+be$ и $-m=-m$, коихъ сумма будетъ слѣдующая:

$$\left. \begin{array}{l} y^3-3ey^2+3e^2y-e^3 \\ ay^2-2aey+ae^2 \\ -by+be \\ -m \end{array} \right\} = 0,$$

или $y^3+(a-3e)y^2-(2ae+b-3e^2)y-e^3+ae^2+be-m=0$. Положимъ $a=3$, $b=2$, $m=12$, и $e=2$, то выйдетъ слѣдующее уравненіе: $y^3-3y^2-2y-4=0$.

§ 210. *Прибавлен.* Для уменьшенія корней уравненія даннымъ количествомъ a надлежитъ только взять вмѣсто неизвѣстной буквы x , другую неизвѣстную y , сложенную съ количествомъ a ; поелику поставя $y+a$ вмѣсто x , будетъ $y=x-a$.

§ 211. Задача. Корень данного уравненія умножить чрезъ a .

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, котораго корень должно умножить чрезъ a . Поставя вмѣсто x неизвѣстную величину $\frac{y}{a}$, будетъ $x = \frac{y}{a}$ или $ax = y$. Отъ чего взятое уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{y^3}{a^3} - \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0$; а для уничтоженія дробей умножь каждой членъ уравненія знаменателемъ a^3 , выйдетъ $y^3 - ar y^2 + a^2 q y - a^3 r = 0$.

Примѣчан. Изъ сего явствуетъ, что корень x , умноженной чрезъ a , существуетъ и не принимая вмѣсто x другой неизвѣстной величины, если только въ данномъ уравненіи умножится второй членъ чрезъ a , третій чрезъ a^2 , а четвертой членъ чрезъ a^3 ; ибо произойдетъ $x^3 - ar x^2 + a^2 q x - a^3 r = 0$ то же, что и въ произведенномъ уравненіи $y^3 - ar y^2 + a^2 q y - a^3 r = 0$ и проч.

§ 212. Задача. Корень данного уравненія раздѣлить чрезъ a .

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Поставя вмѣсто x величину ay , будетъ $ay = x$ или $y = \frac{x}{a}$, отъ чего данное уравненіе изобразится слѣдующимъ образомъ: $a^3 y^3 - a^2 p y^2 + a q y - r = 0$. Но дабы уничтожить предстоящее перваго члена, то раздѣли всѣ члены сего уравненія чрезъ a^3 , будетъ $y^3 - \frac{p y^2}{a} + \frac{q y}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$. Изъ сего явствуетъ, что корень x , раздѣленной на a , существуетъ и не принимая другой неизвѣстной буквы y вмѣсто x , если только въ данномъ уравненіи раздѣлится второй

рой членъ чрезъ a , третій чрезъ a^2 , а четвертой чрезъ a^3 ; поелику произойдетъ уравненіе $x^3 - \frac{px^2}{a} + \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$ то же, что и въ предъидущемъ уравненіи.

§ 213. *Задача.* Данное уравненіе переменныхъ въ другое, такъ чтобы всѣ корни данного уравненія можно было вычестъ изъ количества n .

Рѣшен. Пусть будетъ данное уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Положимъ, что $n - x = y$, или $x = n - y$; то данное уравненіе представится въ другомъ видѣ, какъ слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= -n^3 - 3n^2y + 3ny^2 - y^3 \\ -px^2 &= -n^2p + 2npy - py^2 \\ +qx &= +qn - qy \\ -r &= -r \end{aligned} \right\} = 0,$$

то есть $-y^3 + (3n - p)y^2 + (2np - 3n^2 - q)y + n^3 - n^2p + n^2 - r = 0$, или все равно $y^3 - (3n - p)y^2 - (2np - 3n^2 - q)y - n^3 + n^2p - qn + r = 0$; поелику во всякомъ уравненіи, которае $= 0$, сумма положительныхъ величинъ должна быть равна суммѣ отрицательныхъ.

§ 214. *Задача.* Данное уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ переменныхъ въ другое, котораго бы корни могли быть корнями какой нибудь степени отъ данныхъ.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{x} = y$ или $\sqrt[3]{x} = y$, при чемъ будетъ $x = y^2$, $x = y^3$. И такъ поставя первое изъ сихъ количествъ вмѣсто x , данное уравненіе въ первомъ случаѣ изобразится чрезъ $y^6 - py^4 + qy^2 - r = 0$; а во второмъ чрезъ $y^9 - py^6 + qy^3 - r = 0$.

Слѣд-

Слѣдств. Ежели должно будетъ уравненіе $y^6 - py^4 + qy^2 - r = 0$ обратитьъ въ кубическое, то положи $y^2 = z$, будешь имѣть уравненіе $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$.

§ 215. Задача. Данное уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ обратитьъ въ другое, котораго бы корни были средніе Геометрическіе между a и корнями даннаго уравненія.

Рѣшен. Положи $y = \sqrt{ax}$, или все равно $\frac{y^2}{a} = x$, то данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{y^6}{a^3} - \frac{py^4}{a^2} + \frac{qy^2}{a} - r = 0$; попомъ умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ a^3 , выйдетъ $y^6 - ar y^4 + a^2 q y^2 - a^3 r = 0$. Но дабы сіе уравненіе обратитьъ въ кубическое, то положи $y^2 = z$ предъидущее уравненіе представится въ видѣ $z^3 - ar z^2 + a^2 q z - a^3 r = 0$.

§ 216. Задача. Данное уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ превратить въ другое, котораго бы корень $y : n = 1 : x$ даннаго уравненія.

Рѣшен. Поселику $y : n = 1 : x$, то будетъ $xu = n$, или $x = \frac{n}{y}$. И такъ поставя $\frac{n}{y}$ вмѣсто x , данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{n^3}{y^3} - \frac{pn^2}{y^2} + \frac{qn}{y} - r = 0$; умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ y^3 , выйдетъ $n^3 - pn^2 y + qny^2 - ry^3 = 0$, или все равно $ry^3 - qny^2 + pn^2 y - n^3 = 0$; попомъ раздѣля каждой членъ сего уравненія чрезъ r , выйдетъ $y^3 - \frac{qn}{r} y^2 + \frac{pn^2}{r} y - \frac{n^3}{r} = 0$.

$+ \frac{pn^2}{r}y - \frac{n^3}{r} = 0$, въ коемъ посредствомъ § 207 дроби легко уничтожишь можно.

§ 217. Задача. Данное уравненіе $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ обратить въ другое, котораго бы корень содержался къ корню даннаго уравненія, какъ $a : b$.

Рѣшен. Поскольку должна быть Геометрическая пропорція $a : b = y : x$, изъ которой найдется $x = \frac{by}{a}$; и такъ поставя сію величину вмѣсто x , данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{b^3y^3}{a^3} + \frac{pb^2y^2}{a^2} + \frac{qby}{a} + r = 0$; раздѣли каждой членъ сего уравненія чрезъ $\frac{b^3}{a^3}$, выйдетъ $y^3 + \frac{apy^2}{b} + \frac{a^2qy}{b^2} + \frac{a^3r}{b^3} = 0$, въ которомъ дроби по § 207 уничтожены быть могутъ.

§ 218. Задача. Въ данномъ уравненіи сдѣлать предстоящее какого нибудь члена, которое бы на данное число дѣлилось могло.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3 - 13x - 55 = 0$, въ которомъ бы предстоящее втораго члена дѣлилось на 2, а послѣдній членъ на 3. Умноживъ сихъ дѣлителей между собою, то есть $2 \times 3 = 6$ положи $bx = y$ или $x = \frac{y}{b}$, то данное уравненіе изобразится такъ: $\frac{y^3}{216} - \frac{13y}{6} - 55 = 0$; умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ 216, выйдетъ $y^3 + 468y - 11880 = 0$, въ которомъ предстоящее втораго члена на 2, а послѣдній членъ на 3 раздѣлены быть могутъ.

§ 219. Задача. Данное уравненіе $x^3 - px^2 + px - q = 0$ превратишь въ другое, въ которомъ бы предстоящее какого нибудь члена было произвольное, на примѣръ a .

Рѣшен. Положимъ $x = \frac{y}{z}$, по данное уравненіе посредствомъ предѣвующихъ правилъ изобразится слѣдующимъ образомъ: $y^3 - nzy^2 + pz^2y - qz^3 = 0$; теперь положимъ $nz = a$ или $z = \frac{a}{n}$ для втораго члена, которое поставя въ уравненіи $x = \frac{y}{z}$ вмѣсто z , выйдетъ $x = \frac{ny}{a}$. Теперь поставь въ предѣвующемъ уравненіи $\frac{a}{n}$ вмѣсто z , по выйдетъ уравненіе $y^3 - ay^2 + \frac{a^2py}{n^2} - \frac{a^3q}{n^3} = 0$, въ которомъ предстоящее втораго члена есть a , а прочія чрезъ a раздѣлены быть могутъ.

О различныхъ примѣрахъ третьей степени.

Задача I. Найти два числа, коихъ разность 12, и ежели произведеніе ихъ умножится на сумму чиселъ, то бы вышло 14560.

Рѣшен. Положимъ меньшее число $= x$, большее будетъ $x + 12$, коихъ произведеніе $x^2 + 12x$, умноживъ на $2x + 12$, произойдетъ $2x^3 + 36x^2 + 144x = 14560$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $x^3 + 18x^2 + 72x = 7280$, или $x^3 + 18x^2 + 72x - 7280 = 0$; но поелику послѣдній членъ такъ великъ, что вдругъ дѣлителей онаго познать не можно, которой, какъ видно, на ку-

бическое число 8 раздѣлился можетъ (681 Часть I), то положи $x=2y$, произойдетъ слѣдующее уравненіе: $8y^3+72y^2+144y-7280=0$, а по раздѣленіи на 8 выйдетъ $y^3+9y^2+18y-910=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7 и проч.; но какъ первые изъ нихъ дѣйствительно малы, то возьми $y=7$, опъ чего предвѣдущее уравненіе изобразится чрезъ слѣдующія числа: $343+441+126-910=0$, по сему первой корень $y=7$, а $x=14$. Но дабы найти прочіе корни, то раздѣли данное уравненіе $x^3+18x^2+72x-7280$ на $x-14$, частное будетъ $x^2+32x+520=0$, или $x^2+32x=-520$, котораго квадратныя корни $x=-16 \pm \sqrt{-264}$ оба невозможные. И пакъ будетъ первое искомое число $x=14$, второе $x+12=26$.

Задача II. Найди два числа, коихъ разность 64, и ежели квадратной корень большаго числа умножится на меньшее, то бы вышло 960.

Рѣшен. Пусть меньшее число $=x$, большее будетъ $x+64$. И пакъ по условію вопроса выйдетъ слѣдующее уравненіе: $x\sqrt{x+64}=960$ $=15.8.8$; теперъ умножь каждую часть сего уравненія квадратно, выйдетъ $x^3+64x^2=15^2.8^2.8^2$; положи $x=8y$, будетъ $8^3y^3+8^2.64y^2=15^2.8^2.8^2$; раздѣли на 8^3 , выйдетъ $y^3+8y^2=15^2.8$; пошомъ положи $y=2z$, выйдетъ уравненіе $8z^3+8.4z^2=15^2.8$; раздѣли на 8, будетъ $z^3+4z^2=15^2=225$, или $z^3+4z^2-225=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть

1, 3, 5, и проч. и такъ положа $z = 5$, уравненіе изобразится чрезъ слѣдующія числа: $125 + 100 - 225 = 0$, по сему $y = 2z = 10$, $x = 8y = 80 =$ меньшему числу, а большее $x + 64 = 144$, коего квадратной корень 12, умноженной на 80, производитъ требуемое число 960.

Задача III. Найди три числа, коихъ сумма $= 23$, произведеніе изъ перваго на второе, сложенное съ удвоеннымъ третьимъ $= 60$, произведеніе же втораго и третьяго, сложенное съ утроеннымъ первымъ $= 95$.

Рѣшен. Положимъ первое число x , второе y , третье z , то по условію вопроса выйдутъ три слѣдующія уравненія: I) $x + y + z = 23$; II) $xy + 2z = 60$; III) $yz + 3x = 95$. Изъ перваго уравненія найдемъ $z = 23 - x - y$, изъ втораго $z = \frac{60 - xy}{2}$, изъ третьяго $z = \frac{95 - 3x}{y}$; потомъ составя изъ сихъ трехъ равныхъ количествъ два уравненія $23 - x - y = \frac{60 - xy}{2}$ (А), $\frac{60 - xy}{2} = \frac{95 - 3x}{y}$ (В); изъ уравненія А найдемъ $x = \frac{14 + 2y}{y - 2}$, изъ В выйдетъ $x = \frac{190 - 60y}{6 - y^2}$, изъ коихъ составится уравненіе $\frac{190 - 60y}{6 - y^2} = \frac{14 + 2y}{y - 2}$; умножь каждую часть сперва на $y - 2$, а потомъ на $6 - y^2$, выйдетъ кубическое уравненіе $310y - 60y^2 - 380 = -2y^3 - 14y^2 + 12y + 84$, въ коемъ перенеся члены второй части въ первую, будетъ $2y^3 - 46y^2 + 298y - 464 = 0$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $y^3 - 23y^2 + 149y - 232 = 0$, въ которомъ дѣлится послѣдняго члена сущь, 1, 2, 4, 8,

и проч. И такъ положимъ $y=8$, то уравненіе будетъ $512-1472+1192-232=0$, откуда найдется $x = \frac{14+2y}{y-2} = \frac{14+16}{6} = 5$, $z=23-x-y=23-13=10$.

Задача IV. Найди два числа, коихъ сумма $=7$, а разность ихъ кубовъ $=117$.

Рѣшен. Положимъ большее число x , меньшее будетъ $7-x$; и такъ по обстоятельствуспвамъ вопроса будетъ $x^3-(7-x)^3=117$, или $x^3-343-21x^2+147x+x^3=117$, а по переставкѣ въ второй части въ первую выйдетъ $2x^3-21x^2+147x-460=0$, которое раздѣля на 2, будетъ $x^3-\frac{21xx}{2}+\frac{147x}{2}-230=0$. Теперь положи $x=\frac{z}{2}$, предъидущее уравненіе превратится въ слѣдующее: $z^3-21z^2+294z-1840=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8, 10, 16 и проч. Положимъ $z=10$, то уравненіе изобразится чрезъ $1000-2100+2940-1840=0$; по сему большее число $x=\frac{z}{2}=5$, а меньшее $7-x=7-5=2$, коихъ разность кубовъ $=125-8=117$. Но дабы найти прочіе корни, то раздѣли уравненіе $z^3-21z^2+294z-1840=0$ на $z-10$, частное $z^2-11z+184=0$, или $z^2-11z=-184$ будетъ уравненіе квадратное, котораго корни $z=\frac{11\pm\sqrt{-615}}{2}$ оба невозможные.

Задача V. Петръ имѣетъ у себя денегъ 8 ю рублями больше, нежели Александръ; но ежели общая сумма ихъ денегъ умножится на разность

ность кубовъ изъ чиселъ ихъ денегъ, то произведеніе будетъ 26624.

Рѣшен. Положимъ Александръ имѣетъ x рубл. то число Петровыхъ денегъ будетъ $x+8$, кубъ меньшаго числа x^3 , большаго $(x+8)^3 = x^3 + 24x^2 + 192x + 512$, разность ихъ $= 24x^2 + 192x + 512$, которая, будучи умножена на сумму чиселъ $2x+8=2(x+4)$, произведетъ $48x^3 + 576x^2 + 2560x + 4096 = 26624$, или $48x^3 + 576x^2 + 2560x - 22528 = 0$, а по раздѣленіи на 48 выйдетъ $x^3 + 12x^2 + \frac{160x}{3} - \frac{1408}{3} = 0$; положи $x = \frac{z}{3}$, то уравненіе превратится въ слѣдующее: $z^3 + 36z^2 + 480z - 12672 = 0$, въ которомъ дѣлишели послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и проч. изъ коихъ 6 и 8 малы, когда же вмѣсто z возьмешь 12, то уравненіе превратится въ 0; по сему $x = \frac{z}{3} = \frac{12}{3} = 4 =$ числу Александровыхъ денегъ, $x+8=12=$ числу Петровыхъ денегъ. Но дабы найти прочіе корни, то раздѣли уравненіе $x^3 + 12x^2 + \frac{160x}{3} - \frac{1408}{3}$ на $x-4$, частное будетъ $x^2 + 16x + \frac{352}{3}$, или $x^2 + 16x = -\frac{352}{3}$, откуда найдется $x = -8 \pm \sqrt{-\frac{160}{3}}$, которые оба суть мнимые.

Задача VI. Нѣсколько купцовъ сложились торговашь: каждой положилъ число рублей въ 10 разъ больше числа купцовъ; шѣми деньгами приобрѣли барыша на всякіе 100 рубл. 6 ю рублями больше, нежели число купцовъ; а послѣ

торгу нашлось, что весь прибытокъ составляеѣтъ 392 рублѣ; спраш. число купцовъ.

Рѣшен. Положимъ число купцовъ x , каждой положилъ 10 x рубл. а всѣ вмѣстѣ положили 10 x^2 ; но дабы найти ихъ прибытокъ, то сдѣлай слѣдующую пропорцію: $100 : x + 6 = 10x^2 :$
 $\frac{10x^3 + 60x^2}{100} = \frac{x^3 + 6x^2}{10} =$ всему прибору. И такъ
 $\frac{x^3 + 6x^2}{10} = 392$, или $x^3 + 6x^2 - 3920 = 0$. Положимъ теперь $x = 2z$, то уравненіе по раздѣленіи на 8 превратится въ слѣдующее: $z^3 + 3z^2 - 490 = 0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7, 10 и проч., изъ коихъ 2 и 5 будутъ малы, когда же положится $z = 7$, то выйдетъ $343 + 147 - 490 = 0$; по сему $x = 2z = 14 =$ числу купцовъ, изъ коихъ каждой положилъ $14 \times 10 = 140$ рубл.

Задача VII Нѣсколько купцовъ вмѣстѣ положили въ торгъ 8240 рублѣй, потомъ къ сей суммѣ каждой прибавилъ число своихъ денегъ въ 40 разъ больше, нежели число всѣхъ поварищѣй; сею суммою приобрѣли прибытка столько на 100 рубл. сколько купцовъ было; потомъ раздѣливъ сей прибытокъ нашлось, что каждой получилъ число рублѣй въдесятеро больше числа купцовъ, и еще за тѣмъ осталось 224 рубл. спраш. число купцовъ.

Рѣшен. Пусть число купцовъ было x , каждой положилъ къ общему капиталу 40 x рубл. слѣдственно всѣ вмѣстѣ положили 40 x^2 рубл. по сему вся сумма была 40 $x^2 + 8240$ рубл., которою они на каждые 100 рубл. приобрѣли x рубл.

рубл.; а чтобъ найти количество всего прибытка, то сдѣлай слѣдующую пропорцію: $100 : x = 40x^2 + 8240 : \frac{40x^3 + 8240x}{100} = \frac{2x^3 + 412x}{5}$. Но какъ каждой получилъ изъ прибытка $10x$ рубл. то всѣ вмѣстѣ взяли $10x^2$, и еще осталось 224 рубл. Изъ сего видно, что количество всего прибытка было $10x^2 + 224$; по сему $\frac{2x^3 + 412x}{5} = 10x^2 + 224$, а по умноженіи на 5, выйдетъ $2x^3 + 412x = 50x^2 + 1120$, или $2x^3 - 50x^2 + 412x - 1120 = 0$, которое раздѣля на 2, будетъ $x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$, въ коемъ дѣлили послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 и проч. изъ коихъ каждой долженъ быть положительной; поелику въ уравненіи находится при переменъ знаковъ, слѣдственно всѣ при корня возможные. И такъ положимъ $x = 7$, то выйдетъ $343 - 1225 + 1442 - 560 = 0$, по сему первой корень уравненія $x = 7$; но дабы найти прочіе корни уравненія, то раздѣли $x^3 - 25x^2 + 206x - 560$ на $x - 7$, частное будетъ $x^2 - 18x + 80$, или $x^2 - 18x = -80$, откуда найдется $x = 9 \pm \sqrt{(81 - 80)} = 9 \pm 1$, слѣдственно два послѣднія корня $x = 8$, и $x = 10$. И такъ на сей вопросъ найдены три отвѣта: по первому рѣшенію число купцовъ было 7, по второму 8, а по третьему 10, изъ коихъ каждое рѣшеніе покажетъ одни и тѣжъ самыя требуемыя обстоятельства вопроса.

Задача VIII. Дано число ядеръ трехсторонней пирамиды 364, найти число ядеръ въ боку основанія.

Рѣшен. Положимъ, бокъ основанія имѣетъ x ядеръ, то сумма всѣхъ ядеръ пирамиды будетъ $(\frac{x^2+x}{2})\frac{x}{3}+(\frac{x^2+x}{2})\frac{x}{3}=(\frac{x^2+x}{2})\times(\frac{x+2}{3})=\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$
 $=364$ (6 198. Зад. I.), а по умноженіи на 6, выйдетъ $x^3+3x^2+2x=2184$, или $x^3+3x^2+2x-2184=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и проч. изъ коихъ 6 и 8 будутъ малы. И такъ положимъ $x=12$, то уравненіе будетъ $1728+432+24-2184=0$, слѣдственно число ядеръ основанія $=12$. Прочіежъ корни будутъ отрицательные; поелику въ уравненіи два раза одинакіе знаки одинъ за другимъ слѣдуютъ.

Задача IX. Дано число ядеръ квадратной пирамиды 204, найди число ядеръ, составляющее бокъ квадратнаго основанія пирамиды.

Рѣшен. Положимъ число ядеръ бока x , то сумма всѣхъ ядеръ квадратной пирамиды по (6 198. Задач. I слѣдс.) будетъ $(\frac{x^2+x}{2})\frac{2x}{3}+(\frac{x^2+x}{2})\frac{x}{3}$
 $= (\frac{x^2+x}{2})\times(\frac{2x+1}{3})=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}=204$, а по умноженіи на 6 выйдетъ $2x^3+3x^2+x=1224$, или $2x^3+3x^2+x-1224=0$; раздѣля на 2, выйдетъ $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-612=0$. Теперь положимъ $x=\frac{z}{2}$, то уравненіе по умноженіи на 8 превратится въ слѣдующее: $z^3+3z^2+2z-4896=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 и проч. изъ коихъ 8 и 12 малы. И такъ положимъ $z=16$, то уравненіе будетъ $4096+768+32-4896=0$; по сему $x=\frac{z}{2}=\frac{16}{2}=8$, прочіежъ корни будутъ отрицательные.

За-

Задача X. Въ призматической пирамидѣ дано число ядеръ 238, а число ядеръ въ длинѣ съ числомъ ядеръ въ ширинѣ основанія пирамиды сочтено 18, найди число ядеръ каждаго бока основанія.

Рѣшен. Послику когда сочтется число ядеръ въ длинѣ основанія особо, и число ядеръ въ ширинѣ особо, то сумма сихъ чиселъ будетъ однимъ ядромъ больше 18; потому что на углу лежащее ядро есть общее обоимъ рядамъ, и для того два раза въ счетъ приедемся: и пакъ положимъ, въ ширинѣ сочтено число ядеръ x , то въ длинѣ будетъ $19-x$; но какъ всякая призматическая пирамида составляется изъ квадратной пирамиды (у которой въ боку основанія положено x ядеръ) и трехсторонной наклоненной призмы (158. Зад. I. Прибавл.), у которой въ длинѣ бока число ядеръ будетъ $19-2x$. Но число ядеръ квадратной пирамиды, по предъидущему предложению $= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6}$, а число ядеръ треугольной призмы $= \left(\frac{x^2+x}{2}\right)(19-2x) = \frac{-2x^3 + 17x^2 + 19x}{2}$, или $\frac{-6x^3 + 51x^2 + 57x}{6}$, кои хъ общая сумма будетъ $= \frac{-4x^3 + 54x^2 + 58x}{6}$ или $\frac{-2x^3 + 27x^2 + 29x}{3} = 238$, а по умноженіи чрезъ 3 выйдетъ $-2x^3 + 27x^2 + 29x = 714$, въ коемъ переставя члены первой части во вторую, будетъ $2x^3 - 27x^2 - 29x + 714 = 0$, а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $x^3 - \frac{27x^2}{2} - \frac{29x}{2} + 357 = 0$. Теперь положи

$x = \frac{z}{2}$, то уравненіе по умноженіи на 8 превратится въ слѣдующее: $z^3 - 27z^2 - 58z + 2856 = 0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и проч. И такъ положимъ $z = 12$, то уравненіе выйдетъ $1728 - 3888 - 696 + 2856 = 0$; по сему $x = \frac{z}{2} = 6 =$ числу ядеръ въ ширинѣ, $19 - x = 19 - 6 = 13 =$ числу ядеръ въ длинѣ основанія, коихъ сумма безъ общаго ядра $19 - 1 = 18$. Дабы найти прочіе корни, то раздѣли $x^3 - \frac{27x^2}{2} - \frac{29x}{2} + 357$ на $x - 6$, частное будетъ $x^2 - \frac{15x}{2} - \frac{119}{2}$, или $x^2 - \frac{15x}{2} = \frac{119}{2}$, откуда найдемся $x = \frac{15 \pm \sqrt{\frac{225}{4} + \frac{119}{2}}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{1177}}{4}$, изъ коихъ хопя одинъ корень и положительной, но неизвлекаемой, заключающій въ себѣ цѣлое число съ дробью; но какъ часть ядра въ ряду пирамиды быть не можетъ, слѣдовательно оба сіи корни въ рѣшеніи мѣста имѣть не могутъ.

Примѣчан. Ежели въ кубическомъ уравненіи предстоющее перваго члена будетъ больше послѣдняго члена уравненія, то для разрѣшенія такого уравненія, найдя дѣлителей послѣдняго члена и дѣлителей перваго предстоющаго, изобрази ихъ дробями, принявъ дѣлителей послѣдняго члена за числители, а дѣлителей перваго члена за знаменатели; потомъ возьми вмѣсто неизвѣстной величины такую дробь, которая еслии иссавится вмѣсто неизвѣстной, то бы уравненіе превратилось въ нуль, на примѣръ: пусть будетъ уравненіе $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 6, а перваго предстоющаго суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; и такъ раздѣляя каждаго изъ дѣлителей послѣдняго члена 6 на каждаго изъ дѣлителей перваго предстоющаго 24, произойдутъ слѣдующія дроби: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{3}, \frac{4}{6}, \frac{4}{8}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{8}, \frac{8}{3}, \frac{8}{4}, \frac{8}{6}, \frac{12}{3}, \frac{12}{4}, \frac{12}{6}, \frac{24}{3}, \frac{24}{4}, \frac{24}{6}$, изъ коихъ когда вмѣсто неизвѣстной вели-

чины

чины возьмется $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, или $\frac{3}{4}$ съ знакомъ $+$, то уравненіе превратится въ нуль; по сему три искомыя корня предложеннаго уравненія будутъ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

§ 220. Задача XI. Найди кубической корень величины $45+29\sqrt{2}$, у которой одна часть есть неизвлекаемая.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt[3]{(45+29\sqrt{2})}=x+\sqrt{y}$, возвысь каждую часть сего уравненія въ третью степень, будетъ $45+29\sqrt{2}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+u\sqrt{y}$; но дабы уравниль части сихъ величинъ между собою, то положи $x^3+3xy=45$, $3x^2\sqrt{y}+u\sqrt{y}=29\sqrt{2}$; попомъ умножь каждую часть изъ сихъ уравненій квадратно, выйдетъ I) $x^6+6x^4y+9x^2y^2=2025$, II) $9x^4y+6x^2y^2+y^3=1682$; вычти послѣднее уравненіе изъ перваго, останеся $x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=343$, а по извлеченіи изъ обѣихъ частей кубическаго корня, выйдетъ $x^2-y=7$ или $x^2-7=y$; поставь сію величину въ уравненіи $x^3+3xy=45$ вмѣсто y , будетъ $x^3+3x^2-21x=45$, или $4x^3-21x-45=0$, которое раздѣля на 4, выйдетъ $x^3-\frac{21x}{4}-\frac{45}{4}=0$. Те-

перь положи $x=\frac{z}{2}$, то уравненіе изобразится чрезъ $z^3-21z-90=0$; но поелику дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 5, 6 и проч. то положи $z=6$, уравненіе будетъ $216-126-90=0$; по сему $x=\frac{z}{2}=\frac{6}{2}=3$, $x^2-7=y=9-7=2$; слѣдовательно кубической корень данной вели-

чины $x+\sqrt{y}=3+\sqrt{2}=\sqrt[3]{(45+29\sqrt{2})}$. Для сысканія прочихъ корней раздѣли уравненіе z^3

$-21z-90$ на $z-6$, частное будетъ $z^2+6z+15=0$ или $z^2+6z=-15$, откуда найдется $z=-3 \pm \sqrt{-6}$, по сему $x=\frac{z}{2}=\frac{-3 \pm \sqrt{-6}}{2}$, $x^2=\frac{3 \pm 6\sqrt{-6}}{4}$ слѣдственно $x^2-7=\frac{-25 \pm 6\sqrt{-6}}{4}=y$; и такъ корни данной величины $\sqrt[4]{(45+29\sqrt{2})}$ суть слѣдующіе: $3+\sqrt{2}$, $\frac{-3+\sqrt{-6}+\sqrt{(-25+6\sqrt{-6})}}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{-6}+\sqrt{(-25-6\sqrt{-6})}}{2}$, изъ коихъ два послѣдніе суть невозможные.

§ 221. Теорема. Когда ни одинъ изъ дѣлителей послѣдняго члена корнемъ быть не можетъ, то корень сего уравненія есть неизвлекаемой, то есть ни цѣлымъ числомъ, ни дробью выразится не можетъ.

Доказательство. Положимъ, что въ уравненіи $x^3-px^2+qx-r=0$ дробь $\frac{ac}{bc}=\frac{b}{c}$ представляетъ корень онаго, которую поставя вмѣсто x , предложенное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{a^3c^3}{b^3c^3}-\frac{pa^2c^2}{b^2c^2}+\frac{qac}{bc}-r=0$, или $\frac{a^3}{b^3}=\frac{pa^2}{b^2}-\frac{qac}{bc}+r$, а по умноженіи чрезъ b^3 выйдетъ $\frac{a^3}{b}=pa^2-qab+rb^2$; но $\frac{a^3}{b}$ есть дробь простая, а $pa^2-qab+rb^2$ цѣлое число; по сему дробь $\frac{a^3}{b}$ цѣлому числу равна быть не можетъ; слѣдовательно въ уравненіи $x^3-px^2+qx-r=0$ никакая дробь корнемъ быть не можетъ; цѣлоежъ число въ ономъ уравненіи также не можетъ
быть

быть корнемъ по положенію, слѣдственно корень долженъ быть неизвлекаемой.

Примѣчан. Дабы найти общій образецъ рѣшенія кубическихъ уравненій, коихъ корни или почно найти можно, или ни цѣлымъ числомъ, ни дробью изъяснишься не можешь, то надлежитъ прежде показать правило, какимъ образомъ уничтожается второй членъ полного кубическаго уравненія, а потомъ разсмотримъ свойство онаго, предложитъ общее правило, къ изъявленію кубическихъ корней служащее.

§ 222. **Задача XII.** Найти общее правило, для уничтоженія второго члена всякаго уравненія.

Рѣшен. Пусть будетъ кубическое уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Положимъ теперь $x - z = y$, или $x = y + z$, то произойдетъ слѣдующее:

$$\left. \begin{array}{l} x^3 = y^3 + 3zy^2 + 3z^2y + z^3 \\ - px^2 = - py^2 - 2pzy - pz^2 \\ + qx = \dots \dots \dots qy + qz \\ - r = \dots \dots \dots - r \end{array} \right\} = 0 ;$$

но дабы уничтожился второй членъ сего новаго уравненія, то должно быть $3zy^2 - py^2 = 0$, и $3zy^2 = py^2$, а по раздѣленіи на y^2 будетъ $3z = p$, откуда найдемся $z = \frac{p}{3}$; слѣдовательно для уничтоженія второго члена предложеннаго уравненія, надлежитъ къ y придать одну третью предстоящаго второго члена съ прошивнымъ знакомъ, какъ здѣсь $x = y + \frac{1}{3}p$; поелику будетъ

$$x^3 =$$

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= y^3 + py^2 + \frac{p^2y}{3} + \frac{p^3}{27} \\ -px^2 &= -py^2 - \frac{2p^2y}{3} - \frac{3}{27}p^3 \\ +qx &= \quad \quad + qy + \frac{1}{3}pq \\ -r &= \quad \quad \quad \quad -r \end{aligned} \right\} = 0,$$

то есть $x^3 - px^2 + qx - r = y^3 + (-\frac{p}{3} + q)y - \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{3}pq - r = 0$, которое втораго члена не имѣетъ.

Слѣдств. I. Изъ сего удобно можно видѣть, когда въ уравненіи $x^3 + px^2 +$ и проч. должно будетъ уничтожитьъ второй членъ px^2 , то надлежитъ положить $x = y - \frac{1}{3}p$. Также и для уничтоженія втораго члена въ уравненіи четвертой степени $x^4 + px^3 +$ и проч. слѣдуетъ полагать $x = y + \frac{1}{4}p$. На примѣрѣ, пусть будетъ кубическое уравненіе $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, то положи $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$, выйдетъ слѣдующее уравненіе $y^3 + 0 - 8y - 15 = 0$. Въ уравненіи $x^4 + 2x^3 - 4 = 0$, положи $x = y - \frac{2}{4} = y - \frac{1}{2}$, выйдетъ уравненіе $y^4 - \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{67}{16} = 0$. Ежели уравненіе будетъ $z^5 + az^4 - bz^2 + cz + d = 0$, то второй членъ уничтожится, когда положится $z = x - \frac{a}{5}$, и такъ далѣе.

Слѣдств. II. Ежели и обратно должно будетъ уравненіе $x^3 - ax + b = 0$ превратить въ полное кубическое уравненіе, то положи $x = y + n$ будетъ

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3y^2n + 3n^2y + n^3 \\ -ax &= \quad \quad -ay - an \\ +b &= \quad \quad \quad \quad +b \end{aligned} \right\} = 0,$$

то есть $x^3 - ax + b = y^3 + 3y^2n + (3n^2 - a)y + n^3 - an + b = 0$.

§ 223. *Задача.* Уничтожитъ предпоследній членъ уравненія $x^4 + px^2 - qx + r = 0$, въ которомъ втораго члена не имѣется.

Рѣшен. Положи $x = \frac{r}{y}$, по данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{r^4}{y^4} + \frac{pr^2}{y^2} - \frac{qr}{y} + r = 0$, а по умноженіи на y^4 , будетъ $r^4 + pr^2y^2 - qry^3 + ry^4 = 0$, которое раздѣля на r , выйдетъ $y^4 - qry^3 + pry^2 + r^3 = 0$.

§ 224. *Задача.* Найди общее правило, посредствомъ котораго сыскиваются корни всякаго кубическаго уравненія.

Рѣшен. Дабы разсмотрѣть свойство уравненія $x^3 - 3ax - b = 0$ безъ втораго члена, и посредствомъ онаго опредѣлить общее правило кубическаго рѣшенія; то положимъ $x = n + m$, почему будетъ $x^3 = n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + m^3 = n^3 + 3mnx - (m^3 + n^3) = 0$, коего корень x дѣйствительно $= n + m$. Теперь ежели сравнишь члены сего уравненія съ членами предложеннаго, то найдешся $3mn = 3a$, или $mn = a$, и $m^3 + n^3 = b$ (А). Изъ уравненія $mn = a$ произойдетъ $m^3n^3 = a^3$, откуда найдешся $m^3 = \frac{a^3}{n^3}$, и $n^3 = \frac{a^3}{m^3}$; изъ коихъ ежели въ уравненіи А поставится $\frac{a^3}{m^3}$ вмѣсто n^3 , то выйдетъ $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$, а по умноженіи чрезъ m^3 и переставя величины будетъ $m^6 - bm^3 = -a^3$, въ которомъ по извлеченіи квадратныхъ корней выйдетъ

дешъ $m^3 = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}$; и наконецъ найдемся $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}}$. Равнымъ образомъ когда въ уравненіи А вмѣсто m^3 поставимся $\frac{a^3}{n^3}$, то выйдетъ $n^3 + \frac{a^3}{n^3} = b$, откуда найдемся, какъ и прежде, $n = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}}$; по сему $x = m + n = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}}$ *).

Примѣчан. Ежели соображая общее правило кубическаго рѣшенія съ какииъ либо даннымъ уравненіемъ найдемся, что $\frac{1}{4}b^2 > a^3$, то всегда одинъ корень будетъ дѣйствительной, а прочіе невозможные; также первыя корни будутъ дѣйствительныя, ежели будетъ $\frac{1}{4}b^2 = a^3$, или когда $\frac{1}{4}b^2 < a^3$, то есть когда количество $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}$ будетъ или о или невозможное.

О рѣшеніи волпросовъ посредствомъ общаго кубическаго правила.

Задача I. Найти число, котораго кубъ равенъ искомому числу, шестъ разъ взятому, сложенному съ 9 ю.

Рѣшен. Положимъ искомое число x , то по силѣ вопроса будетъ $x^3 = 6x + 9$, или $x^3 - 6x - 9 = 0$. И такъ ежели сравнимъ сіе уравненіе съ общимъ правиломъ рѣшенія, то найдемся $3a = 6$,

или

*) NB. Здѣсь одинъ квадратной корень означенъ +, а другой знакомъ — по той причинѣ, дабы было $mn = a$, или $m^3 \times n^3 = a^3$; ибо естли оныя означены будутъ одинакими знаками, то не выйдетъ сего произведенія. Изобрѣшеніе сего правила приписывается за нѣсколько уже сошъ дѣшъ Кардану или наипаче Сципіону Феррею.

или $a=2$, $b=9$, по сему $a^3=8$, $\frac{1}{4}b^2=\frac{81}{4}$ и $\frac{1}{4}b^2-a^3=\frac{81}{4}-8=\frac{49}{4}$; слѣдственно $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}=\sqrt[3]{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$, по сей причинѣ $\sqrt[3]{\frac{1}{2}b}+\sqrt[3]{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}=\sqrt[3]{(\frac{9}{2}+\frac{7}{2})}=\sqrt[3]{8}=2$. Слѣдовательно $x=\sqrt[3]{(\frac{9}{2}+\frac{7}{2})}+\sqrt[3]{(\frac{9}{2}-\frac{7}{2})}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=2+1=3$, которое есть требуемое число.

Задача II. Найти такое число, котораго кубъ безъ упрощеннаго искомаго числа равенъ 2мб.

Рѣшен. Пусть искомое число будетъ x , то по свойству вопроса произойдетъ слѣдующее уравненіе: $x^3-3x=2$, или $x^3-3x-2=0$; сравни сие уравненіе съ общимъ правиломъ кубическаго рѣшенія, то найдется $3a=3$, $a=1$, и $b=2$; по сему $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}b}+\sqrt[3]{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}b-\sqrt[3]{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}}$
 $=\sqrt[3]{(1+0)}+\sqrt[3]{(1-0)}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}=2$.

Задача III. Найти три числа непрерывной Арифметической пропорціи, у которой разность $d=3$, а произведеніе $p=28$.

Рѣшен. Пусть будетъ среднее число y , то большее число будетъ $y+d$, а меньшее $y-d$, произведеніе сихъ трехъ чиселъ будетъ $y^3-yd^2=p$, или $y^3-yd^2-p=0$. Если сие уравненіе сравнить съ общимъ правиломъ кубическаго рѣшенія, то найдется $3a=d^2$ или $a=\frac{d^2}{3}$, и $p=b$.

И такъ изобразя сіи величины числами, найдется y также, какъ и x (ибо одно вмѣсто другаго принявъ можно), то есть

$y = \sqrt[3]{14 + \sqrt{(196-27)}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{(196-27)}}$
 $= \sqrt[3]{(14+13)} + \sqrt[3]{(14-13)} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1}$
 $= 3+1=4$; большое число $y+d=4+3=7$, а
 меньшее $y-d=4-3=1$, кои соспавяшѣ слѣ-
 дующую Ариѳметическую пропорцію: $\div 1$,
 4, 7.

Задача IV. Въ полномъ кубическомъ ура-
 вненіи $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, найди корень x .

Рѣшен. Дабы въ семъ уравненіи найти не-
 извѣстную величину x , то сперва должно
 уничтожитьъ второй членъ. И такъ положивъ
 $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$, данное уравненіе изобразится
 такимъ образомъ: $y^3 - y = 0$ (§ 222), или
 $y^3 - 1 \cdot y = 0$. Теперь ежели сіе уравненіе сравнишь
 съ общимъ правиломъ рѣшенія, то найдемся
 $3a=1$, $a=\frac{1}{3}$ и $b=0$; а изобразя чрезъ сіи чи-
 сла общій образъ рѣшенія, выйдетъ $y = \sqrt[3]{\frac{0}{2}}$
 $+ \sqrt[3]{(\frac{0}{4} - \frac{1}{27})} + \sqrt[3]{\frac{0}{2}} - \sqrt[3]{(\frac{0}{4} - \frac{1}{27})} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{(-\frac{1}{27})}}$
 $- \sqrt[3]{\sqrt[3]{(-\frac{1}{27})}} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{27})} - \sqrt[3]{(-\frac{1}{27})} = 0$, по сему
 найденной корень $y=0$; но дабы найти прочіе
 корни, то раздѣли уравненіе $y^3 - y$ на y , ча-
 стное будетъ $y^2 - 1$ или $y^2 = 1$, въ которомъ
 $\sqrt{y^2} = y = \pm 1$, слѣдовательно два послѣдніе
 корня суть $y=1$, $y=-1$, откуда найдемся
 $x = y + 2 = 0 + 2 = 2$, $x = y + 2 = 1 + 2 = 3$, $x = y$
 $+ 2 = -1 + 2 = 1$, изъ коихъ каждой корень
 есть положительной.

Примѣчан. Въ упомянутомъ уравненіи $y^3 - y$, корень
 y найти можно и не употребляя общаго правила; ибо
 раз-

разрѣшивъ оное на множители, будетъ $y^3 - y = y(y^2 - 1) = y(y+1)(y-1) = 0$, и ежели каждой множитель положится $= 0$, то выйдетъ $y = 0$, $y = -1$, $y = 1$ тоже, что и прежде.

Задача V. Въ уравненіи $x^3 + 30x - 117 = 0$, или $x^3 = -30x + 117$ найди величину x .

Рѣшен. Разсматривая общее правило кубическаго рѣшенія, найдемся $3a = -30$, $a = -10$, $b = 117$, а изобразивъ общее правило сими числами, выйдетъ $x = \sqrt[3]{\frac{117}{2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{13689}{4} + \frac{4000}{4}\right)} + \sqrt[3]{\frac{117}{2}} - \sqrt[3]{\left(\frac{13689}{4} + \frac{4000}{4}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{117 + 133}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{117 - 133}{2}\right)} = \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{8} = 5 - 2 = 3$; но дабы найти прочіе корни, то раздѣли уравненіе $x^3 + 30x - 117$ на $x - 3$. частное будетъ $x^2 + 3x + 39$, или $x^2 + 3x = -39$, въ которомъ найдемся $x = \frac{-3 \pm \sqrt{-147}}{2}$, то есть оба послѣдніе корни суть невозможные.

Задача VI. Найди такое число, котораго кубъ равенъ шесть разъ взятому своему корню, сложенному съ 40 ю.

Рѣшен. По свойству вопроса уравненіе будетъ $x^3 = 6x + 40$ или $x^3 - 6x - 40 = 0$, въ коемъ $3a = 6$, $a = 2$, $b = 40$. И такъ по общему рѣшенію найдемся $x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})} = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ (§ 220).

Задача VII. Въ уравненіи $x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$ найди величину x .

Рѣшен. Дабы изъ даннаго уравненія исключить вшорой членъ, то положи $x-2=y$ или $x=y+2$, опѣ чего данное уравненіе перемѣнится въ $y^3+y-2=0$, или $y^3=-1.y+2$. Ежели сравнимъ сіе уравненіе съ общимъ образцомъ рѣшенія (§ 224), то найдемся $a=-\frac{1}{3}$, $b=2$, по сему $\frac{1}{4}b^2=1$, и $-a^3=\frac{1}{27}$. И шакъ по общему правилу найдемся $y=\sqrt[3]{(1+\sqrt{\frac{28}{27}})}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{\frac{28}{27}})}$; но какъ $\sqrt{\frac{28}{27}}=\sqrt{\frac{28 \cdot 3}{27 \cdot 3}}=\frac{\sqrt{21}}{9}=\frac{6\sqrt{21}}{27}$, по сему $y=\sqrt[3]{(1+\frac{6\sqrt{21}}{27})}+\sqrt[3]{(1-\frac{6\sqrt{21}}{27})}$
 $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(27+6\sqrt{21})}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(27-6\sqrt{21})}$, опкуда найдемся, что кубической корень изъ 27 $\pm 6\sqrt{21}$ дѣйствительно $=\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$, слѣдственно кубической корень изъ $27-6\sqrt{21}=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$, ибо кубъ корня $\frac{3+\sqrt{21}}{2}=\frac{216+48\sqrt{21}}{8}=27+6\sqrt{21}$, по сему $\frac{1}{3}(\frac{3+\sqrt{21}}{2})+\frac{1}{3}(\frac{3-\sqrt{21}}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$; по сему $x=y+2=1+2=3$. Но дабы найти другіе два корня, то раздѣли данное уравненіе $x^3-6x^2+13x-12$ на $x-3$, частное будетъ x^2-3x+4 , или $x^2-3x=-4$, опкуда найдемся $x=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\sqrt{(\frac{9}{4}-\frac{15}{4})}=\frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$, изъ чего видно, что оба послѣдніе корни суть невозможные.

Задача VIII. въ уравненіи $x^3+6x-36\sqrt{3}=0$, или $x^3=-6x+36\sqrt{3}$ найти величину x .

Рѣшен. Положи $x=y\sqrt{3}$, будетъ $x^3=3y^3x\sqrt{3}$, $6x=6y\sqrt{3}$; по сему данное уравненіе пере-

ремѣннися въ $3y^3\sqrt{3}+6y\sqrt{3}-36\sqrt{3}=0$, а по раздѣленіи на $3\sqrt{3}$, выйдетъ $y^3+2y-12=0$. И такъ сравнивъ сіе уравненіе съ общимъ образцомъ кубическаго рѣшенія, найдется $3a=-2$, $a=-\frac{2}{3}$, $b=12$, а изобразя общее правило сими числами, найдется $y=\sqrt[3]{6+\sqrt{(36+\frac{8}{27})}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{(36+\frac{8}{27})}}=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{980}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{980}{27}}}=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{980\cdot 3}{27\cdot 3}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{980\cdot 3}{27\cdot 3}}}=\sqrt[3]{6+\frac{14\sqrt{15}}{9}}+\sqrt[3]{6-\frac{14\sqrt{15}}{9}}=\sqrt[3]{\frac{162+42\sqrt{15}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{162-42\sqrt{15}}{27}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{162+42\sqrt{15}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{162-42\sqrt{15}}=1+\frac{\sqrt{15}}{3}+1-\frac{\sqrt{15}}{3}=2$ (с 220), по сему $x=y\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

О Рѣшеніяхъ уравненій четвертой стелени.

Задача I. Въ уравненіи $x^4=81$, или $x^4-81=0$ найди величину x .

Рѣшен. Извлеки корень четвертой стелени изъ каждой части уравненія, будетъ $\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{81}=x=3$. Но дабы найти прочіе корни сего уравненія, то раздѣли уравненіе x^4-81 на $x-3$, частное будетъ $x^3+3x^2+9x+27=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 3, 9 и проч.; положи $x=-3$, то уравненіе изобразится чрезъ $-27+27-27+27=0$; потомъ раздѣли уравненіе $x^3+3x^2+9x+27$

на $x+3$, частное будетъ x^2+9 или $x^2=-9$, откуда найдется $x=\pm\sqrt{-9}=\pm 3\sqrt{-1}=\pm 3\sqrt{-1}$. И такъ въ данномъ уравненіи найдено четыре корня, изъ коихъ одинъ только дѣйствительной, а прочіе суть мнимые.

Примѣчан. Поелику x^4 есть квадратъ изъ x^2 , по сей причинѣ гораздо удобнѣе можно найти всѣ четыре корня, когда только изъ x^4 извлечется сперва корень квадрата; а потомъ изъ найденнаго корня извлечется еще квадратной корень, какъ-то $\sqrt{x^4}=\sqrt{81}=x^2=\pm 9$; и такъ когда $x^2=+9$, также $x^2=-9$, то изъ сего явствуетъ, что изъ перваго найдется два корня $x=\pm\sqrt{9}=3$ и $x=-3$, а изъ другаго $x=\pm\sqrt{-9}=\pm 3\sqrt{-1}$, $x=-3\sqrt{-1}$.

Задача II. Въ данномъ уравненіи $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ найди величину x .

Рѣшен. Поелику въ предложенномъ уравненіи находишься двѣ переменныя знаковъ $+$, $-$, и $-$, $+$ и два повторенія одного знака $+$, $+$ и $-$, $-$ другъ за другомъ слѣдующихъ; то изъ сего заключить можно, что сіе уравненіе имѣетъ два корня положительныхъ и два отрицательныхъ, изъ коихъ каждой долженъ быть дѣлителемъ послѣдняго члена (§ 205); дѣлителижъ послѣдняго члена 12 суть 1, 2, 3, 4, 6, 12; и такъ положи $x=+1$, данное уравненіе изобразится чрезъ $1+2-7-8+12=0$. Еслижъ положишь $x=-1$, то данное уравненіе въ нуль превращено быть не можетъ. Теперь положимъ $x=2$, то уравненіе начертано будетъ слѣдующими числами: $16+16-28-16+12=0$; однакожъ уравненіе не можетъ быть $=0$, когда возьмется $x=-2$; равнымъ образомъ еслили возьмется $x=3$, то уравненіе также не будетъ $=0$. Еслижъ положимъ $x=-3$,
то

по уравненіе будетъ $81-54-63+24+12=0$; также найдется и четвертой корень $x=-4$. И такъ найденные четыре корня суть $x=1$, $x=2$, $x=-3$, $x=-4$, изъ коихъ два положительныя и два отрицательныя.

Задача III. Въ данномъ уравненіи $x^4+12x^3+48x^2+68x+15=0$ найди величину x .

Рѣшен. Поелику дѣлители послѣдняго члена суть 1, 3, 5, и всѣ корни онаго должны быть отрицательныя, то положимъ $x=-3$, уравненіе выйдетъ $81-324+432-204+15=0$; но дабы найти прочіе корни, то раздѣли данное уравненіе на $x+3$, частное будетъ $x^3+9x^2+21x+5=0$, гдѣ $x=-5$; потомъ раздѣли кубическое уравненіе на $x+5$, частное будетъ $x^2+4x+1=0$ или $x^2+4x=-1$, откуда найдется $x=-2\pm\sqrt{3}$. И такъ искомыя четыре корня суть $x=-3$, $x=-5$, $x=-2+\sqrt{3}$, $x=-2-\sqrt{3}$ всѣ отрицательныя.

Пусть еще будетъ уравненіе $x^4-3x^3-8x^2-6x-20=0$, то положи $x=-2$, выйдетъ $16+24-32+12-20=0$; потомъ раздѣля данное уравненіе на $x+2$, частное будетъ $x^3-5x^2+2x-10=0$. Положи корень сего уравненія $x=5$, будетъ $125-125+10-10=0$; раздѣли кубическое уравненіе на $x-5$, частное будетъ $x^2+2=0$ или $x^2=-2$, откуда найдется $x=\pm\sqrt{-2}$; и такъ найденные четыре корня суть $x=5$, $x=-2$, $x=+\sqrt{-2}$, $x=-\sqrt{-2}$, изъ коихъ одинъ только положительной, а прочіе отрицательныя.

§ 225 Если уравненіе будетъ слѣдующаго вида: $x^4+max^3+na^2x^2+ma^3x+a^4=0$, или

$x^4 + mx^3 + nx^2 + mx + 1 = 0$, въ которомъ предстоящія неизвѣстныхъ величинъ отъ середины въ обѣ стороны идущъ въ одинакомъ порядкѣ, то оное представить можно изъ двухъ множителей $(x^2 + pax + a^2)(x^2 + qax + a^2) = 0$, коихъ произведеніе будетъ $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq + 2)a^2x^2 + (p+q)a^2x + a^4 = 0$. Сравнивъ сіе уравненіе съ предложеннымъ, найдемся I) $p+q = m$, II) $pq + 2 = n$, изъ коихъ величину p и q опредѣлить должно; но какъ въ первомъ будетъ $q = m - p$, во второмъ $q = \frac{n-2}{p}$, то составя изъ сихъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{n-2}{p} = m - p$, умножь чрезъ p , выйдетъ $n-2 = pm - p^2$, а переставя члены изъ одной части въ другую будетъ $p^2 - mp = 2 - n$, откуда найдется $p = \frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$, также и $q = m - p = \frac{1}{2}m \mp \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$. Теперь въ первомъ изъ множителей $x^2 + pax + a^2 = 0$, или $x^2 + pax = -a^2$, найдемся $x = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2p^2 - 4a^2)} = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2 - 4)}$; во второмъ $x^2 + qax + a^2 = 0$, или $x^2 + qax = -a^2$, найдемся $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2q^2 - 4a^2)} = \frac{1}{2}aq \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(q^2 - 4)}$, чрезъ что найдущя всѣ четыре корня.

Для изъясненія сего, пусть будетъ уравненіе $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$, въ которомъ $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, чрезъ что найдется $p = \frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n + 8)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(16 + 12 + 8)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{-4 \pm 6}{2} = 1$, $q = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n + 8)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$; по сей причинѣ будетъ

$x =$

$$x = -\frac{1}{2}ar \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2 - 4)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - 4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \text{ и } x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(25 - 4)} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21};$$

следовательно четыре искомые корня будутъ слѣдующіе: I) $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. II) $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$; III) $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$, IV) $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$, изъ коихъ первые два невозможные, а послѣдніе дѣйствительные; поелику хотя число 21 и несовершенной квадрата, однакожъ корень его можно изобразить безъ чувствительной погрѣшности десятичною дробью.

§ 226. Если уравненіе будетъ такого разположенія, $x^4 - m ax^3 + na^2 x^2 - pa^3 x + a^4 = 0$, въ которомъ всѣ пѣжъ числа, какъ и въ прежнемъ, но токмо при второмъ и четвертомъ членахъ, разные съ прежними знаки находятся; то представь себѣ, что сіе уравненіе состоитъ изъ двухъ множителей $(x^2 + a p x - a^2) \cdot (x^2 + q a x - a^2) = 0$, коихъ произведеніе будетъ $x^4 + (p + q) a x^3 + (pq - 2) a^2 x^2 - (p + q) a^3 x + a^4 = 0$. Сравнивъ сіе уравненіе съ даннымъ, легко усмотрѣть можно, что $p + q = m$, $pq - 2 = n$ или $pq = n + 2$, изъ коихъ величину p и q найти слѣдуетъ; но какъ въ первомъ будетъ $q = m - p$, а во второмъ $q = \frac{n + 2}{p}$, то будетъ $\frac{n + 2}{p} = m - p$, а по умноженіи чрезъ p выйдетъ $n + 2 = pm - p^2$, или $p^2 - pm = -n - 2$, откуда найдется $p = \frac{m}{2} + \sqrt{(\frac{m^2}{4} - n - 2)}$ $= \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n - 8)}$; но какъ $q = m - p$, по сему $q = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n - 8)}$. Теперь въ первомъ изъ множителей $x^2 + p a x - a^2$, или $x^2 + p a x = a^2$, най-

дется

дешся $x = -\frac{1}{2}ap \pm \sqrt{a^2 + \frac{p^2 a^2}{4}} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + p^2 a^2} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{p^2 + 4}$ (§ 109); а во второмъ $x^2 + qax - a^2$ или $x^2 + qax = a^2$, найдется $x = -\frac{1}{2}aq \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4}$; чрезъ что всѣ четыре корня изображены быть могутъ.

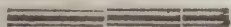
И такъ положимъ уравненіе $x^4 - 6x^3 + 24x + 16 = 0$, или $x^4 - 3.2x^3 + 3.8x + 16$, которое сравнивъ съ предписаннымъ, найдется $a = 2$, $m = -3$, $n = 0$; посредствомъ чего найдется $p = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4n - 8} = \frac{-3+1}{2} = -1$, $q = \frac{-3-1}{2} = -2$; по сему въ первомъ изъ множителей будетъ $x = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}a\sqrt{p^2 + 4} = 1 \pm \sqrt{5}$, во второмъ $x = 2 \pm \sqrt{8}$. Изъ сего явствуетъ, что корни даннаго уравненія будутъ слѣдующіе: I) $x = 1 + \sqrt{5}$, II) $x = 2 + \sqrt{8}$, III) $x = 1 - \sqrt{5}$, IV) $x = 2 - \sqrt{8}$; изъ коихъ первые два дѣйствительные, а послѣдніе сопряженные; которые, будучи между собою умножены, произведутъ данное уравненіе.

Задача I. Въ данномъ уравненіи $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$, найди величину корня x .

Рѣшен. Сравнивъ данное уравненіе съ общимъ образцомъ рѣшенія, легко усмотрѣть можно, что здѣсь $m = -3$, $n = 2$, $a = 1$; посредствомъ чего найдется $p = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4n - 8} = \frac{-3+1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7}$, $q = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4n - 8} = \frac{-3-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}$, откуда найдется $x = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}a\sqrt{p^2 + 4} = \frac{3 - \sqrt{-7} + \sqrt{(18 - 6\sqrt{-7})}}{4} = \frac{3 - \sqrt{-7} - \sqrt{(18 - 6\sqrt{-7})}}{4}$, $x = -\frac{1}{2}aq \pm \frac{1}{2}a\sqrt{q^2 + 4} = \frac{3 + \sqrt{-7} + \sqrt{(18 + 6\sqrt{-7})}}{4} =$

О приведеніи уравн. 4 й степл. въ кубическїя 381

$$\frac{3+\sqrt{-7}-\sqrt{(18+6\sqrt{-7})}}{4}$$
; по сему четыре искомыя кор-
 ня будущѣ слѣдующіе: $x = \frac{3-\sqrt{-7}+\sqrt{(18-6\sqrt{-7})}}{4}$,
 $x = \frac{3-\sqrt{-7}-\sqrt{(18+6\sqrt{-7})}}{4}$, $x = \frac{3+\sqrt{-7}+\sqrt{(18+6\sqrt{-7})}}{4}$,
 $x = \frac{3+\sqrt{-7}-\sqrt{(18-6\sqrt{-7})}}{4}$.



О приведеніи уравненій четвертой степени
 въ уравненія третьей степени.

§ 227. Задача. Данное уравненіе $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, привести въ кубическое урав-
 неніе.

Рѣшен. Представь себѣ, что данное уравне-
 ніе одинаково съ слѣдующимъ: $(x^2+\frac{1}{2}ax+p)^2 -$
 $(qx+r)^2=0$, въ которомъ нужно найти поль-
 ко величину буквы p , q и r , посредствомъ ко-
 ихъ сыщется попомѣ и неизвѣстная величина
 x ; возвысь каждую часть сего взятаго уравненія
 во вторую степень, будетъ

$$\left. \begin{aligned} x^4+ax^3+\frac{1}{4}a^2x^2+apx+p^2 \\ +2px^2-2qrx-r^2 \\ -q^2x^2 \end{aligned} \right\} = 0,$$

которое сравнивъ съ даннымъ уравненіемъ, удобно
 усмотрѣть можно, что $\frac{1}{4}a^2+2p-q^2=b$, $ap-2qr$
 $=c$, $p^2-r^2=d$, изъ коихъ въ первомъ будетъ
 $\frac{1}{4}a^2+2p-b=q^2$, или $a^2+8p-4b=4q^2$, во вто-
 ромъ $ap-c=2qr$, въ третьемъ $p^2-d=r^2$. Теперь
 ежели первое изъ сихъ уравненій умножится
 третьимъ, а второе будетъ возвышено во вто-
 рую степень, то выйдутъ слѣдующія уравне-
 нія

нія: I) $(a^2 + 8p - 4b)(p^2 - d) = 4q^2 r^2$, или $8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - a(a^2 - 4b) = 4q^2 r^2$, II) $(ap - c)^2 = a^2 p^2 - 2apc + c^2 = 4q^2 r^2$; по сему $8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - d(a^2 - 4b) = a^2 p^2 - 2apc + c^2$, а переставя величины второй части въ первую, выйдетъ $8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2 d + 4bd - c^2 = 0$, въ которомъ чрезъ правила кубическихъ уравненій найдется p ; а по сей уже извѣстной величинѣ изъ уравненія $\frac{1}{4}a^2 + 2p - b = q^2$ найдется $\pm q = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2p - b}$; равнымъ образомъ изъ уравненія $ap - c = 2qr$ сыщется $\frac{ap - c}{2q} = r$ или изъ претяго уравненія выйдетъ $r = \sqrt{(p^2 - d)}$. Потомъ взявъ принятое уравненіе $(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, перенеси изъ первой части во вторую $(qx + r)^2$, и извлеки изъ обѣихъ частей квадратные корни, выйдетъ $x^2 + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, или все равно $x^2 + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$ (*), а переставя величины qx и p въ каждомъ изъ сихъ уравненій, выйдетъ изъ перваго $x^2 + (\frac{1}{2}a - q)x = r - p$, изъ втораго $x^2 + (\frac{1}{2}a + q)x = -p - r$, изъ коихъ въ каждомъ уравненіи найдется по два корня.

Дабы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть предложено уравненіе $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, которое сравнивъ съ общимъ образцомъ рѣшенія, найдется $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$, изъ коихъ для изобрѣшенія величины p произойдетъ уравненіе $8p^3 - 140p^2 + 808p - 1540 = 0$, а по раздѣленіи на 4 выйдетъ $2p^3 - 35p^2 + 202p - 385 = 0$, въ которомъ дѣлители

*) Величина $-qx$ пріемлется вмѣсто $+qx$ по той причинѣ, что $\sqrt{q^2} = \pm q$.

тели послѣдняго члена суть 1, 5, 7, 11 и проч. И такъ есѣли положимъ $p=5$, то выйдетъ $250-875+1010-385=0$, слѣдственно $p=5$; а когда положимъ $p=7$, то будетъ $686-1715+1414-385=0$, по сему другой корень $p=7$; а для сысканія третьяго раздѣли уравненіе на 2, выйдетъ $p^3-\frac{35}{2}p^2+$ и проч. $=0$, въ которомъ предположенное $\frac{35}{2}$ втораго члена равно суммѣ корней, по сему вычтя изъ $\frac{35}{2}$ сумму 12 двухъ первыхъ корней, остатокъ $\frac{11}{2}$ будетъ третій корень уравненія, изъ коихъ посредствомъ каждаго всѣ четыре корня предложеннаго уравненія изобрѣшены быть должны. И такъ положимъ сперва $p=5$, то будетъ $q=\sqrt{(25+10-35)}=0$, $r=\frac{-50+50}{0}=0$; но

послику чрезъ сіи уравненія найти ничего не можно, то возьми третье уравненіе изъ первыхъ $r^2=p^2-d=25-24=1$, по сему $r=1$; посредствомъ сего найдутся два первые корня; ибо въ первомъ уравненіи $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$ будетъ $x^2+(-\frac{10}{2}-0)x=1-5$, или $x^2-5x=-4$, откуда найдется $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{(\frac{25}{4}-4)}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}=4$, или $x=\frac{2}{2}=1$; а во второмъ

$x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=-p-r$, выйдетъ $x^2+(-\frac{10}{2}+0)x=-5-1$, то есть $x^2-5x=-6$; откуда найдется $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{(\frac{25}{4}-6)}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=3$, или $x=\frac{4}{2}=2$. Тѣжъ самые корни выйдутъ, ежели положимъ $p=7$, или $p=\frac{11}{2}$: послѣднее когда возьмемъ сперва $p=7$, то будетъ $q=\sqrt{(25+14-35)}=2$, $r=\frac{-70+50}{4}=-5$, откуда произойдутъ

два

два квадратныя уравненія: первое $x^2 + (-\frac{1}{2} - 2)x = -5 - 7$, или $x^2 - 7x = -12$, въ которомъ $x = \frac{7 \pm \sqrt{1^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{7 \pm 7}{2} = 4$, или $x = \frac{6}{2} = 3$; второе $x^2 + (-\frac{1}{2} + 2)x = -7 + 5$, или $x^2 - 3x = -2$, гдѣ $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} = 2$, или $x = 1$, и такъ найденные четыре корня суть тѣжъ, какіе и прежде найдены были. Теперь ежели возьмемъ $p = \frac{11}{2}$, то такъ же произойдутъ тѣ же самые корни; ибо тогда будетъ $q = \sqrt{25 + 11 - 35} = 1$, и $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, откуда произойдутъ два квадратныя уравненія: первое $x^2 + (-5 - 1)x = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}$, то есть $x^2 - 6x = -8$, въ которомъ найдется $x = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1 = 4$, или $x = 2$; второе, $x^2 + (-5 + 1)x = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}$, то есть $x^2 - 4x = -3$, откуда найдется $x = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1 = 3$, или $x = 1$, которые суть тѣжъ четыре корня, что и прежде.

Задача I. Въ уравненіи $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 18x - 7 = 0$ посредствомъ предвѣдущаго предложенія найти величину x .

Рѣшен. Ежели данное уравненіе сравнится съ предложеннымъ уравненіемъ въ § 227, то найдется $a = -2$, $b = -2$, $c = 18$, $d = -7$. Но дабы найти величину p , то выйдетъ слѣдующее кубическое уравненіе: $8p^3 + 8p^2 - 16p - 240 = 0$, а по раздѣленіи на 8, будетъ $p^3 + p^2 - 2p - 30 = 0$, въ которомъ дѣлилися послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 5 и проч. И такъ естли положимъ $p = 3$, то уравненіе изобразится слѣдующими

щими числами: $27+9-6-30=0$, по сему первой корень $p=3$; потомъ по сей известной величинѣ найдемся $q=\sqrt{(1+6+2)}=\sqrt{9}=\pm 3$, $r=\frac{-6-18}{6}=-4$, посредствомъ чего найдутся всѣ четыре корня; ибо изъ уравненія $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$ выйдетъ $x^2-4x=-4-3=-7$, откуда найдемся $x=2\pm\sqrt{-3}$, то есть $x=2+\sqrt{-3}$, $x=2-\sqrt{-3}$; а изъ уравненія $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=r-p$ будетъ $x^2+2x=-3+4=1$, откуда найдемся $x=-1\pm\sqrt{2}$, то есть $x=-1+\sqrt{2}$, $x=-1-\sqrt{2}$.

Задача II. Въ данномъ уравненіи $x^4-16x-12=0$ найти величину x .

Рѣшен. Если данное уравненіе сравнится съ уравненіемъ § 227, то найдемся $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$, по сему $8p^3-4bp^2+(2ac-8d)p-a^2d+4bc-c^2=0$, изобразится слѣдующими числами: $8p^3+96p-256=0$, а по раздѣленіи на 8 будетъ $p^3+12p-32=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8 и проч. изъ коихъ корень $p=2$, откуда найдемся $q=\sqrt{4}=2$, $r=\frac{16}{4}=4$; по сему $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$ превратится въ $x^2-2x=2$, а отсюда сыщется $x=1\pm\sqrt{3}$, то есть $x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$, также изъ уравненія $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=r-p$ выйдетъ $x^2+2x=-6$, гдѣ $x=-1\pm\sqrt{-5}$, то есть $x=-1+\sqrt{-5}$, $x=-1-\sqrt{-5}$, изъ коихъ одинъ только первой корень положительной, а прочіе мнимые.

Задача III. Въ данномъ уравненіи $x^4-3x^2-4x-3=0$ найти величину x .

Рѣшен. Сравни данное уравненіе съ предложеннымъ въ § 227 уравненіемъ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, будетъ $a = 0$, $b = -3$, $c = -4$, $d = -3$, чрезъ что уравненіе $8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8a)p - a^2d + 4bd - c^2 = 0$ перемѣнится въ $8p^3 + 12p^2 + 24p + 36 - 16 = 0$, или $8p^3 + 12p^2 + 24p + 20 = 0$, а по раздѣленіи на 4 выйдетъ $2p^3 + 3p^2 + 6p + 5 = 0$, въ коемъ дѣлители послѣдняго члена суть 1 и 5; и такъ еслии положимъ $p = -1$, то уравненіе превратится въ нуль; а попомъ посредствомъ сей величины найдется $q = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b\right)} = 1$, $r = \frac{ap - c}{2q} = \frac{-4}{2} = -2$, по сему $x^2 + \left(\frac{1}{2}a - q\right)x = r - p$ превратится въ $x^2 - x = 3$, а изъ $x^2 + \left(\frac{1}{2}a + q\right)x = -r - p$ выйдетъ $x^2 + x = -1$, откуда найдется $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Задача IV. Въ уравненіи $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0$ найти величину x .

Рѣшен. Если сіе уравненіе сравнится съ уравненіемъ § 227, то найдется $a = -6$, $b = 12$, $c = -12$, $d = 4$, по сему уравненіе $8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8a)p - a^2d + 4bd - c^2 = 0$ перемѣнится въ $8p^3 - 48p^2 + 112p - 96 = 0$, а по раздѣленіи на 8, выйдетъ $p^3 - 6p^2 + 14p - 12 = 0$, гдѣ корень $p = 2$, посредствомъ чего найдется $q = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b\right)} = \sqrt{\left(\frac{36}{4} + 4 - 12\right)} = 1$, $r = \frac{ap - c}{2q} = \frac{-12 + 12}{2} = 0$; попомъ $x^2 + \left(\frac{1}{2}a - q\right)x = r - p$, перемѣнится въ $x^2 - 4x = -2$, также изъ $x^2 + \left(\frac{1}{2}a + q\right)x = -r - p$ выйдетъ $x^2 - 2x = -2$, откуда найдутся корни: I) $x = 2 + \sqrt{2}$, II) $x = 2 - \sqrt{2}$, III) $x = 1 + \sqrt{-1}$, IV) $x = 1 - \sqrt{-1}$.

При-

Прибавлен. Такимъ же образомъ найдутся корни и слѣдующихъ уравненій :

$$I) x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 4x + 2 = 0.$$

$$II) x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 14x - 6 = 0.$$

$$III) x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 58x + 35 = 0.$$

$$IV) x^4 + 6x^3 + x^2 - 54x - 90 = 0.$$

§ 228. **Задача.** Найди второе общее правило, къ разрѣшенію уравненій четвертой степени служащее.

Рѣшен. Положимъ корень уравненія четвертой степени $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ p, q и r означаютъ три корня кубическаго уравненія $z^3 - n^2z + mz - h = 0$, въ которомъ будетъ $n = p + q + r$, $m = p^2 + q^2 + r^2$, $h = pqr$ (§ 203). Теперь составь квадраты изъ $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, получишь $x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, или $x^2 - n = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, возвысь еще каждую изъ сихъ частей во вторую степень, выйдетъ $x^4 - 2nx^2 + n^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{q^2pr} + 8\sqrt{r^2pq}$; но $4pq + 4pr + 4qr = 4m$, по сему $x^4 - 2nx^2 + n^2 - 4m = (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}) \times 8\sqrt{pqr}$, въ коемъ есть ли вмѣсто pqr поставишь h , а вмѣсто $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ напишешь x , то выйдетъ $x^4 - 2nx^2 + n^2 - 4m = 8x\sqrt{h}$, или $x^4 - 2nx^2 - 8x\sqrt{h} + n^2 - 4m = 0$, котораго корень $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$. И такъ если данное уравненіе, на примѣръ, $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$ сравнишь съ изобрѣтеннымъ уравненіемъ, то найдется $2n = a$, или $n = \frac{1}{2}a$, $8\sqrt{h} = b$, или $\sqrt{h} = \frac{b}{8}$, и $h = \frac{bb}{64}$, $n^2 - 4m = -c$, $4m = n^2 + c$, въ коемъ будетъ $m = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}c = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$.

$+ \frac{1}{4}c$; а наконецъ по извѣстнымъ величинамъ n , m и h сыщутся всѣ три корня уравненія $z^3 - nz^2 + mz - h = 0$, то есть $z = p$, $z = q$, $z = r$; потомъ по симъ извѣстнымъ количествамъ найдется величина $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Дабы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть будетъ дано уравненіе $y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8 = 0$, въ которомъ для уничтоженія втораго члена положи $y - \frac{8}{4} = x$, или $y = x + 2$, то данное уравненіе превратится въ $x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$ (§ 222 следствие I). Теперь сравнивъ сіе уравненіе съ предположеннымъ $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, найдется $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$, откуда найдется $h = \frac{1}{4}$, $n = 5$, $m = \frac{17}{4}$, отъ чего уравненіе $z^3 - nz^2 + mz - h = 0$ переименуется въ $z^3 - 5z^2 + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, въ коемъ для исключенія дробей положи $z = \frac{u}{2}$, выйдетъ $u^3 - 10u^2 + 17u - 2 = 0$, въ которомъ найдутся три корня $u = 2$, $u = 4 + \sqrt{15}$, $u = 4 - \sqrt{15}$; потомъ найдется $z = p = \frac{u}{2} = 1$, $z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}$, $z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}$; откуда найдется $\sqrt{p^2} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ *, \sqrt{r}

-
- *) Дабы найти корень квадрата изъ $8 + 2\sqrt{15}$, то положи $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{v} + \sqrt{u}$; потомъ умножь каждую изъ сихъ частей квадратно, будетъ $8 + 2\sqrt{15} = v + u + 2\sqrt{vu}$. Теперь пусть будетъ $8 = v + u$, и $2\sqrt{15} = 2\sqrt{vu}$, или $\sqrt{15} = \sqrt{vu}$, изъ коихъ возвысивъ каждую часть во вторую степень, будетъ $15 = vu$; и такъ изъ перваго уравненія найдется $u = 8 - v$, а изъ втораго $u = \frac{15}{v}$, по сему $\frac{15}{v} = 8 - v$, а по умноженіи на v выйдетъ $15 = 8v - v^2$, или все равно $v^2 - 8v = -15$, откуда найдется $v = 4 + \sqrt{15}$, и $u = 8 - v = 8 - 5 = 3$; следовательно $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{v} + \sqrt{u} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

$$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}}{2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}; \text{ но поелику } \sqrt{h} = \frac{1}{2}$$

есть количество положительное, то произведение четырехъ величинъ, изображающихъ x , должно быть положительное, по сему будетъ

$$I) x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

$$= 1 + \sqrt{5}, II) x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

$$- \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}, III) x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -$$

$$1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}, IV) x = -\sqrt{p}$$

$$- \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3};$$

но какъ $y = x + 2$, то искомые четыре корня будутъ слѣдующіе: I) $y = 3 + \sqrt{5}$, II) $y = 3 - \sqrt{5}$, III) $y = 1 + \sqrt{3}$, IV) $y = 1 - \sqrt{3}$.



О разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе.

§ 229 Сей способъ состоитъ въ томъ, когда уравненіе вышней степени совершенныхъ корней въ себѣ не заключаетъ, не смотря на то, можно ли будетъ ихъ изъяснить коренными знаками или нѣтъ: тогда находясь оные корни, приближаясь къ точности дѣйствительнаго корня до тѣхъ поръ, пока погрѣшность за ничто почесться можетъ, о чемъ хотя въ § 101, 102, 103, 104 и 105 и говорено было, однакожъ предлагаемой здѣсь способъ несравненно удобнѣе прежнихъ.

И такъ когда извѣстно, что величина, изображающая корень какой нибудь степени, бу-

детѣ на примѣрѣ больше 4 хѣ, а меньше 3 пи, тогда полагается величина сего корня $=4+n$, гдѣ n дѣйствительно дробь; но поелику сія дробь меньше 1, то квадратъ ея n^2 долженъ быть и еще меньше, а кубъ ея n^3 и слѣдующія по немъ степени будутъ уже такъ малы, что ихъ изъ вычисленія выпустить будетъ можно; ибо здѣсь ищется не самая величина n , но токмо ближайшая ей, слѣдовательно когда дробь n ближайшая величина изслѣдована будетъ, то изъ того уже корень $4+n$ сыщется несравненно дѣйствительнѣе.

§ 230 Дабы сіе показать вообще, то пусть будетъ уравненіе $x^2=a$, въ которомъ искомой корень больше n , а меньше $n+1$, и такъ положимъ $x=n+d$, гдѣ величина d означаетъ дробь, которую къ n придавъ должно, дабы получить требуемой корень еще ближе къ истинному; по сей причинѣ будетъ $x^2=n^2+2nd+d^2=a$, а исключивъ d^2 , выйдетъ $n^2+2nd=a$, откуда найдется $d=\frac{a-nn}{2n}$, по сему $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{a+nn}{2n}$. Изъ сего удобно видѣть можно, когда n близко къ совершенному корню подходило, то $\frac{a+nn}{2n}$ будетъ еще ближе къ совершенству онаго. Естлижъ сію величину опять поставитъ вмѣсто n , то найдется величина, изображающая корень еще ближе къ истинному; а когда найденную такимъ образомъ величину поставитъ еще вмѣсто n , то требуемой корень выйдетъ несравненно ближе къ истинному, нежели предъидущей. И такъ положимъ

ложимъ на примѣръ: $x^2 = a = 3$, то найдется $n = 1$, $x = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Теперь поставь 2 вмѣсто n , то выйдетъ $x = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ ближе перваго къ истинному корню; будежъ еще поставится $\frac{7}{4}$ вмѣсто n , то найдется $x = \frac{nn+a}{2n} = \frac{97}{38} = 1\frac{41}{38}$ несравненно дѣйствительнѣе предѣидущаго; наконецъ поставь еще $\frac{97}{38}$ вмѣсто n , то выйдетъ $x = \frac{10817}{16864} = 1\frac{7953}{16864}$, которая такъ близко къ $\sqrt{3}$ подходитъ, что квадратъ ея $x^2 = \frac{354070489}{111628496}$ только дробью $\frac{1}{111628496}$ ю больше 3 хъ.

Примѣчан. Сей способъ изобрѣтенія корней чрезъ приближеніе во всѣхъ уравненіяхъ съ равнымъ успѣхомъ употреблятъ можно, какъ-то изъ слѣдующихъ примѣровъ будетъ видно.

§ 231. Задача I. Въ данномъ уравненіи $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ найди ближайшій корень къ истинному.

Рѣшен. Дабы сіе прежде показать вообще, то пусть ближайшій корень даннаго уравненія будетъ n ; и такъ положимъ $x = n - p$, по сему когда p должна быть дробь, то p^2 и прочія высшей степени оной, изъ уравненія безъ погрѣшности выпустить можно, по сему будетъ $x^3 = n^3 - 3n^2p$, $x^2 = n^2 - 2np$, изъ коихъ поставя первое вмѣсто x^3 , а второе вмѣсто x^2 выйдетъ уравненіе $n^3 - 3n^2p + an^2 - 2anp + bp + c = 0$, или $n^3 + an^2 + bp + c = 3n^2p + 2anp + bp = (3n^2 + 2an + b)p$, откуда найдется

Ш 4

$p =$

$$p = \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3nn + 2an + b}, \text{ по сему } x = n - \left(\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3nn + 2an + b} \right) \\ = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3nn + 2an + b}, \text{ есѣли сія величина поставится}$$

опянь вмѣсто n , то выйдетъ такая величина, которую безъ всякой погрѣшности за истинной корень уравненія принять можно.

И такъ дабы сіе общее правило изъяснить примѣромъ, то пусть будетъ уравненіе $x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$, гдѣ $a = 2$, $b = 3$, $c = -50$; но поелику ближайшій корень сего уравненія $n = 3$, то найдется $x = \frac{2n^3 + 2n^2 + c}{3nn + 4n + 3} = \frac{61}{21}$. Поставь сію дробь еще вмѣсто n , выйдетъ $x = \frac{536647}{184905} = 2\frac{166837}{184905}$, которое число гораздо ближе перваго къ искомому корню подходитъ, но есѣли сія дробь поставится еще вмѣсто n , то найдется величина, несравнѣнно ближе къ точному корню подходящая.

Задача II. Въ уравненіи $x^3 + 4x + 40 = 0$, найти ближайшій корень x .

Рѣшен. Сравнивъ общее уравненіе $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ съ даннымъ, найдется $a = 0$, $b = 4$, $c = 40$; и такъ ежели положимъ ближайшій корень $x = n - p$, то найдется $x = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3nn + 2an + b} = \frac{2n^3 - 40}{3nn + 4}$; но поелику корень предложеннаго уравненія долженъ быть больше -3 , а меньше -4 , слѣдственно ежели положимъ $n = -3$, то выйдетъ $x = -\frac{94}{31} = -3\frac{1}{31}$, есѣлижъ сія дробь поставится еще вмѣсто n , то найдется пребуемой корень еще дѣйствительнѣе.

При-

Прибавлен. Такимъ же порядкомъ найдется корень уравненія $x^3 + 4x + 8 = 0$.

Задача III. Въ уравненіи $x^5 - 6x - 10 = 0$ найди ближайшій корень.

Рѣшен. Пусть будетъ ближайшій корень къ искомому $x = n$; но поелику изъ уравненія видно, что корень даннаго уравненія больше 1, а меньше 2 быть долженъ, то положимъ $x = n + p$ откуда найдется $x^5 = n^5 + 5n^4p$, по сему $x^5 - 6x - 10 = n^5 + 5n^4p - 6n - 6p - 10 = 0$, или $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$, откуда найдется $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$, по сему $x = n + p = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. И такъ положимъ $n = 1$, выйдетъ $x = \frac{14}{-1} = -14$, которая величина къ рѣшенію вопроса не годится; ибо ближайшая величина корню n взята очень мала; по сей причинѣ положимъ $n = 2$, то выйдетъ $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, которая дробь довольно уже близка къ истинному корню; но если дробь $\frac{69}{37}$ поставится еще вмѣсто n , то найдется величина, несравненно ближе къ дѣйствительному корню подходящая.

О приведеніи уравненій вышнихъ степеней въ нижнія.

Поелику изъ первыхъ правилъ уравненія вышнихъ степеней видно, что всякое уравненіе меньшей степени удобнѣе рѣшено быть можетъ, нежели высшей степени; и такъ дабы не оставить и сего полезнаго предмета Алгебры, за необходимое почтено предложимъ здѣсь общія

правила къ приведенію уравненій высшей степени въ уравненія нижней степени.

§ 232. Задача I. Уравненіе четвертой степени привести въ два квадратныя, изъ коихъ бы одно было безъ втораго члена.

Рѣшен. Дабы сіе правило изъяснить вообще, то пусть будетъ уравненіе $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$; теперь представь себѣ, что сіе уравненіе составлено изъ слѣдующихъ множителей: $(x^2 + fx + g)(x^2 + l) = 0$ гдѣ f , g и l , найди слѣдуетъ, изъ коихъ по дѣйствительномъ умноженіи выйдетъ $x^4 + fx^3 + (g + l)x^2 + flx + gl = 0$, которое сравнивъ съ предположеннымъ, найдется $f = n$, $g + l = p$, $fl = q$, $gl = r$, отсюда найдется $l = \frac{q}{n}$, $p = g + \frac{q}{n}$, $g = p - l = p - \frac{q}{n}$, также $g = \frac{r}{l}$, а по раздѣленіи r на $l = \frac{q}{n}$ частное будетъ $g = \frac{nr}{q}$; но поелику $g = p - l = \frac{r}{l}$, то по умноженіи обѣихъ частей на l , и по переставкѣ членовъ выйдетъ $l^2 - pl = -r$, отсюда найдется $l = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - r)}$; по сей причинѣ данное уравненіе разрѣшится на два слѣдующія: I) $x^2 + fx + g = x^2 + nx + p - \frac{q}{n} = 0$, II) $x^2 + l = x^2 + \frac{q}{n} = 0$.

И такъ дабы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть будетъ уравненіе $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$, которое ежели сравнится съ общимъ уравненіемъ, то найдется $n = 2$, $p = 3$, $q = 4$, $r = 2$, а отсюда выйдетъ $g = p - \frac{q}{n}$

$= 3 - \frac{1}{2} = 1$, также $g = \frac{nr}{q} = \frac{2^2}{4} = 1$, $l = \frac{q}{n} = \frac{1}{2} = 2$,
или все равно $l = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - r)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - 2)}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; по сему $x^2 + nx + p - \frac{q}{n} = x^2 + 2x$
 $+ 1 = 0$, также $x^2 + \frac{q}{n} = x^2 + 2 = 0$; слѣдова-

тельно данное уравненіе изобразится въ двухъ
множителяхъ $(x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 2) = 0$, изъ ко-
ихъ произойдутъ два требуемыя уравненія:
I) $x^2 + 2x + 1 = 0$, или $x^2 + 2x = -1$, II) $x^2 + 2$
 $= 0$, или $x^2 = -2$, откуда найдутся всѣ че-
тыре корня данного уравненія, изъ перваго
 $x = -1 \pm \sqrt{0}$, гдѣ оба корня $x = -1$, $x = -1$, а
изъ втораго $x = \pm \sqrt{-2}$.

§ 233. Задача II. Уравненіе пятой степе-
ни $x^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ привесть
въ два уравненія, изъ коихъ бы одно было ку-
бическое, а другое квадратное.

Рѣшен. Представь себѣ, что данное уравне-
ніе состоить изъ двухъ множителей $x^3 + hx^2 +$
 $lx + k = 0$, и $x^2 + g = 0$, коихъ произведение бу-
детъ $x^5 + hx^4 + (l+g)x^3 + (k+gh)x^2 + glx + gk$
 $= 0$. Теперь сравнивъ сіе уравненіе съ даннымъ,
найдемся $h = n$, $l + g = p$, $k + gh = q$, $gl = r$, gk
 $= s$, откуда сыщется $l = p - g = \frac{r}{g}$, а по умно-
женіи чрезъ g и по переставкѣ членовъ, вый-
детъ $g^2 - pg = -r$, гдѣ найдемся $g = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - r)}$;
по сему второй множитель $x^2 + g$ переимѣ-
нится въ $x^2 + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - r)} = 0$: или принявъ
въ разсужденіе другія величины, найдемся $k = \frac{s}{g}$,

также

также $k=q-gn$, по сему $q-gn=\frac{s}{g}$, а по умноженіи чрезъ g , и по переставкѣ членовъ будетъ $ng^2-qg=-s$, гдѣ раздѣля обѣ части на n , выйдетъ $g^2-\frac{q}{n}g=-\frac{s}{n}$, откуда найдемся $g=\frac{q}{2n}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4n^2}-\frac{s}{n}\right)}=\frac{q\pm\sqrt{q^2-4ns}}{2n}$; по сему множитель x^2+g представится въ другомъ видѣ $x^2+\frac{q\pm\sqrt{q^2-4ns}}{2n}=0$. Но дабы найти втораго множителя, то положивъ для краткости $g=m$, уравненіе $x^3+hx^2+lx+k=0$ переменится въ $x^3+nx^2+\frac{r}{m}x+\frac{s}{m}=0$; слѣдовательно данное уравненіе разрѣшено на два требуемыхъ уравненія, изъ коихъ одно полное кубическое, а другое квадратное.

§ 234. *Задача III.* Уравненіе $x^5+nx^4+rx^3+qx^2+rx+s=0$ привести въ два уравненія, изъ коихъ бы одно было полное квадратное, а другое кубическое безъ втораго члена.

Рѣшен. Представъ себѣ, что данное уравненіе заключаетъ въ себѣ слѣдующихъ множителей: $x^2+fx+g=0$, $x^3+lx+k=0$, то произведение ихъ будетъ $x^5+fx^4+(l+g)x^3+(k+fl)x^2+(fk+gl)x+gk=0$. И такъ ежели сіе уравненіе сравнимъ съ даннымъ, то найдемся $f=n$, $l+g=p$, $k+fl=q$, $fk+gl=r$, $gk=s$, откуда сыщется $l=p-g$, $k=q-fl$, въ которомъ поставя n вмѣсто f , и $p-g$ вмѣсто l , выйдетъ $k=q-(p-g)n=q-np+gn$, а изъ уравненія $gk=s$, най-

найдется $k = \frac{s}{g}$, по сему $q - np + gn = \frac{s}{g}$, а по умноженіи на g выйдетъ $ng^2 - ngp + gq = s$, гдѣ раздѣля объ части на n , будетъ $g^2 + (\frac{q}{n} - p)g = \frac{s}{n}$, откуда найдется $g = \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{(\frac{q}{2n} - \frac{1}{2}p)^2 + \frac{s}{n}}$; слѣдовательно уравненіе $x^2 + fx + g = 0$ переменится въ $x^2 + nx + \frac{1}{2}f - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{(\frac{q}{2n} - \frac{1}{2}p)^2 + \frac{s}{n}}$. Сего множителя можно предсавить и въ другомъ видѣ: поелику $k = q - fl = q - nl$, также изъ уравненія $fk + gl = r$, или $nk + gl = r$ выйдетъ $k = \frac{r - gl}{n}$, по сему $q - nl = \frac{r - gl}{n}$; но $l = p - g$, слѣдовательно естли сія величина поставится въ предъидущемъ уравненіи вмѣсто l , то выйдетъ $q - np + ng = \frac{r - pg + g^2}{n}$, а по умноженіи чрезъ n , будетъ $qn - n^2p + n^2g = r - pg + g^2$, или $g^2 - (p + n^2)g = nq - n^2p - r$, откуда найдется $g = \frac{p + nn}{2} \pm \sqrt{(\frac{p + nn}{2})^2 + nq - n^2p - r}$, слѣдственно уравненіе $x^2 + fx + g = 0$ переменится въ $x^2 + nx + \frac{p + nn}{2} \pm \sqrt{(\frac{p + nn}{2})^2 + nq - n^2p - r} = 0$ (D). Равнымъ образомъ естли вмѣсто g для крапко-сти поставится m , то и другой множитель $x^3 + lx + k = 0$ переменится въ $x^3 + (t - m)x + \frac{s}{m} = 0$. Теперь положимъ, что данное уравненіе одинаково съ уравненіемъ $x^5 + ax^4 - (a^2 - ab)x^3 + (a^2b - a^3)x^2 + a^3b^2 = 0$ (B), гдѣ $a = n$, $ab = a^2 = p$, $a^2b - a^3 = q$, $r = 0$, $a^3b^2 = s$; и такъ еже-
ли

ли подставится въ уравненіи $x^2 + nx + \frac{p}{2} - \frac{q}{2n}$
 $\pm \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{q}{2n}\right)^2 + \frac{s}{n}} = 0$ (А), или $x^2 + nx = \frac{q}{2n} - \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{q}{2n}\right)^2 + \frac{s}{n}}$ извѣстныя величины вмѣ-
 сто n , p и q , то найдется $\frac{p}{2} - \frac{q}{2n} = \frac{a^2 + ab}{2}$
 $-\left(\frac{a^2 + ab}{2}\right) = 0$, по сему и $\left(\frac{p}{2} - \frac{q}{2n}\right)^2 = 0$, но по-
 елику $s = a^3 b^2$, то будетъ $\frac{s}{n} = \frac{a^3 b^2}{a} = a^2 b^2$, и
 $\sqrt{\frac{s}{n}} = \sqrt{a^2 b^2} = ab$, отъ чего уравненіе А переимѣ-
 нится въ $x^2 + ax + ab = 0$, на которое раздѣля
 уравненіе В, частное будетъ $x^3 - a^2 x + a^2 b = 0$,
 слѣдовательно данное уравненіе раздѣлено на
 два требуемыхъ уравненія. Тѣжъ самыя уравне-
 нія произойдутъ, еслии извѣстныя величины
 подставляются въ уравненіи D вмѣсто n , p и q .

§ 235. Задача IV. Найти два уравненія,
 одно чистое квадратное, а другое полное че-
 твертой степени, на которыя бы уравненіе
 шестой степени $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$ дѣлилось могло.

Рѣшен. Положимъ, что данное уравненіе со-
 ставлено изъ слѣдующихъ множителей: $x^2 + g = 0$, и $x^4 + hx^3 + ix^2 + kx + l = 0$, коихъ произве-
 деніе будетъ $x^6 + hx^5 + (g+i)x^4 + (k+gh)x^3 + (l+gi)x^2 + gkx + gl = 0$, которое сравнивъ съ
 даннымъ, найдется $h = n$, $i + g = p$, $k + gh = q$,
 $l + gi = r$, $gk = s$, $gl = t$, а отсюда сыщется
 $k = q - gh = q - ng = \frac{s}{g}$, а по умноженіи на g ,
 выйдетъ $gq - ng^2 = s$ или $ng^2 - qg = -s$, а по раз-
 дѣле-

дѣленіи на n выйдетъ $g^2 - \frac{q}{n}g = -\frac{s}{n}$, гдѣ $g = \frac{q}{4m}$
 $\pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4m^2} - \frac{s}{n}\right)}$, по сей причинѣ уравненіе $x^2 + g$
 $= 0$ переѣмнится въ $x^2 + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4m^2} - \frac{s}{n}\right)}$; но
 поелику во всякомъ данномъ уравненіи извѣ-
 стныя буквы изображаются числами, слѣд-
 ственно ежели оное раздѣлишь на сіе послѣд-
 нее уравненіе, то выйдетъ второе требуемое
 уравненіе, на которое равноѣрно данное ура-
 вненіе раздѣлишь можетъ.

§ 236. Задача V. Найди два уравненія,
 одно полное квадратное, а другое четвертой
 степени безъ втораго члена, на которыя бы
 уравненіе шестой степени $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3$
 $+ rx^2 + sx + t = 0$ дѣлилось могло.

Рѣшен. Представь себѣ, что данное уравне-
 ніе состоиптъ изъ двухъ множителей: $x^2 + fx$
 $+ g = 0$ (A), и $x^4 + ix^2 + kx + l = 0$ (B), коихъ
 произведеніе будетъ

$$\left. \begin{array}{l} x^6 + fx^5 + gx^4 + kx^3 + lx^2 + gkx + gl \\ + ix^4 + fix^3 + gix^2 + flx \\ + f k x^2 \end{array} \right\} = 0,$$

которое ежели сравнишь съ даннымъ, то вый-
 детъ $f = n$, $g + i = p$, $k + fi = q$, $l + gi + fk = r$
 (C), $gk + fl = s$ (D), $gl = t$, откуда найдется
 $i = p - g$, $k = q - fi$, а когда въ семъ уравненіи
 поставишь n вмѣсто f , и $p - g$ вмѣсто i , то
 выйдетъ $k = q - np + ng$; потомъ поставя въ ура-
 вненіяхъ C и D вмѣсто f и i найденныя вели-
 чины, выйдетъ изъ уравненія (C) $l = r - gp + g^2$
 $- qn + n^2p - n^2g$, изъ (D) $l = \frac{s - qg + ngp - ng^2}{n}$, слѣ-

Довашельно ежели сїи два равныя количества умножатся чрезъ n , то выйдетъ $ng^2 - (n^3 + np)g + n^3p + nr - qn^2 = s - ng^2 + (np - q)g$, а по переставкѣ членовъ будетъ $2ng^2 - (n^3 + 2np - q)g = s - nr + qn^2 - n^3p$, въ коемъ раздѣля обѣ части на $2n$ будетъ $g^2 - (\frac{n^3 + 2np - q}{2n})g = \frac{s - nr + qn^2 - n^3p}{2n}$, въ которомъ по правиламъ квадратныхъ уравненій найдется g . И такъ естли въ уравненіяхъ А и В на мѣсто неизвѣстныхъ величинъ f , g и проч. поставяпся найденныя величины, то дѣйствительнѣе выйдутъ пакія уравненія, изъ коихъ на каждое, предложенное уравненіе $x^6 + nx^5 + px^4 +$ и проч. раздѣлено бытъ можетъ.

§ 237. Задача VI. Уравненіе шестой степени $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$ привесть въ два кубическія, изъ коихъ бы одно было полное, а другое неполное.

Рѣшен. Представимъ себѣ, что данное уравненіе составлено изъ двухъ множителей $x^3 + gx + h = 0$, и $x^3 + ix^2 + kx + l = 0$, коихъ произведеніе будетъ слѣдующее:

$$\left. \begin{array}{l} x^6 + ix^5 + kx^4 + lx^3 + hix^2 + hkx + hl \\ gx^4 + gix^3 + gkx^2 + glx - \\ hx^3 - - - - \end{array} \right\} = 0,$$

которое сравнивъ съ даннымъ уравненіемъ, найдется $i = n$, $g + k = p$, $h + l + gi = q$, $hi + gk = r$, $hk + gl = s$, $hl = t$. Изъ сихъ уравненій найдется g слѣдующимъ образомъ: $k = p - g$, $l = q - h - ng$, $k = \frac{r - nh}{g}$, $l = \frac{s - hk}{g}$, въ коемъ естли вмѣсто k поставимъ $p - g$, то будетъ $l = \frac{s - ph + gh}{g}$, по

сему

еому $p - z = \frac{r - nh}{g}$, а по умноженіи на g выйдетъ $pg - g^2 = r - nh$, въ коемъ найдется $h = \frac{g^2 - pg + r}{n}$; также $q - h - ng = \frac{s - ph + gh}{g}$, а по умноженіи на g выйдетъ $qg - hz - ng^2 = s - ph + zh$, или $-ng^2 + qz - s = 2hz - ph$, а по раздѣленіи на $2g - p$, выйдетъ $h = \frac{-ng^2 + qz - s}{2g - p} = \frac{g^2 - pg + r}{n}$, или $(\frac{ng^2 - qz + s}{2g - p}) + (\frac{g^2 - pg + r}{n}) = 0$, а по умноженіи сей величины чрезъ $2g - p$ и чрезъ n , будетъ

$$\left. \begin{aligned} 2g^3 + n^2g^2 - nqg + ns \\ - 3pg^2 + 2rg - pr \\ + p^2g \end{aligned} \right\} = 0 \quad (A);$$

но поелику найдено $h = \frac{g^2 - pg + r}{n}$, $h = \frac{t}{l}$, $l = q - h - ng$, въ которомъ есшли вмѣсто h поставится первое уравненіе, то выйдетъ $l = \frac{-g^2 + pg - r}{n} + q - ng$, а по приведеніи въ дробь будетъ $l = \frac{-g^2 + pg - r + qn - n^2g}{n}$. И такъ когда t раздѣлился на сію величину, и на мѣсто h поставится первое уравненіе, то выйдетъ $\frac{t}{l} = \frac{g^2 - pg + r}{n} =$

$$\frac{nt}{-g^2 + pg - r + qn - n^2g}, \text{ откуда произойдетъ } \left. \begin{aligned} g^4 - 2pg^3 - n^2pg^2 + n^2rg - nq \\ + n^2g^3 + p^2g^2 - 2prg + r^2 \\ - nqg^2 + nprg + n^2t \\ + 2rg^2 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (B);$$

но дабы найти величину g , то можно сіе уравненіе привести во вторую степень слѣдующимъ образомъ: умножь уравненіе В чрезъ 2, выйдетъ

Ц

$2g^4$

$$\left. \begin{aligned} 2g^4 - 4pg^3 - 2n^2pg^2 + 2n^2rg - 2nqr \\ + 2l^2g^3 + 2p^2g^2 - 4prg + 2r^2 \\ - 2nqg^2 + 2npqg + 2n^2t \\ + 4rg^2 \end{aligned} \right\} = 0 (C);$$

попомѣ умножь уравненіе А на g, выйдетъ

$$2g^4 = \left\{ \begin{array}{l} -r^2g^3 + nqg^2 - nsg \\ + 3pg^3 - 2r^2g^2 + prg \\ - p^2g^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{поставь сію величину} \\ \text{въ уравненіи С вмѣсто} \\ 2g^4, \text{ произойдетъ} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} -pg^3 - 2n^2pg^2 + 2n^2rg - 2nqr \\ n^2g^3 + p^2g^2 - 3prg + 2r^2 \\ - nqg^2 + 2npqg + 2n^2t \\ + 2rg^2 - nsg \end{aligned} \right\} = 0.$$

Теперь умножь сіе уравненіе на 2, выйдетъ

$$\left. \begin{aligned} -2pg^3 - 4n^2pg^2 + 4n^2rg - 4nqr \\ + 2n^2g^3 + 2p^2g^2 - 6prg + 4r^2 \\ - 2nqg^2 + 4npqg + 4n^2t \\ + 4rg^2 - 2nsg \end{aligned} \right\} = 0 (D).$$

Умножь уравненіе А на $p - n^2$, получишь

$$-2pg^3 + 2n^2g^3 = \left\{ \begin{array}{l} +n^2pg^2 - npqg + nps \\ -n^4g^2 + n^3qg - n^3s \\ -3p^2g^2 + 2prg - p^2r \\ +3n^2pg^2 - 2n^2rg + n^2pr \\ - \quad \quad + p^3g \quad \quad - \\ - \quad \quad - n^2p^2g \quad \quad - \end{array} \right.$$

Наконецъ поставь сію величину въ уравненіи D на мѣсто $-2pg^3 + 2n^2g^3$, то отъ сего произойдетъ уравненіе вѣпорой степени слѣдующее:

$$\left. \begin{aligned} -p^2g^2 - 4prg + 4r^2 \\ -n^4g^2 + 3npqg + 4n^2t \\ + 4rg^2 + 2n^2rg - 4rqn \\ - 2nqg^2 - 2nsg - p^2r \\ + p^3g + nps \\ + n^3qg + n^2pr \\ - n^2p^2g - n^3s \end{aligned} \right\} = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} + p^2g^2 + 4prg - 4r^2 \\ + n^4g^2 - 3npqg - 4n^2t \\ - 4rg^2 - 2n^2rg + 4rqn \\ + 2nqg^2 + 2nsg + p^2r \\ - p^3g - nps \\ - n^3qg - n^2pr \\ + n^2p^2g + n^3s \end{aligned} \right\} = 0,$$

откуда найдется величина g ; потомъ посредствомъ сей извѣстной величины найдутся всѣ неизвѣстныя величины h , i , k и l двухъ множителей; наконецъ когда вмѣсто оныхъ въ упомянутыхъ множителяхъ поставятся извѣстные, то данное уравненіе представится въ двухъ требуемыхъ множителяхъ.

Примѣчаніе. Посредствомъ сихъ предложеній всякое уравненіе высшей степени, какъ-то седьмой, восьмой и проч. легко можно привести въ нижнія уравненія.

КОНЕЦЪ АЛГЕБРЫ.



О ПРЕДЛОЖЕНІЯХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ.

Теорема. I. Квадратъ діAGONALI АВ прямоугольнаго треугольника ABC равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ боковъ AC и BC. (Чертеж. I. фигура 4).

Доказательство. Изъ точки В бокомъ BC опиши кругъ; продолжи АВ до D; точки Е и С, также С и D соедини прямыми линиями ЕС и CD, будетъ $\triangle AEC$ подобенъ $\triangle ACD$ (Часть II. 185). И такъ положивъ $AC=a$, $BC=b$, $AB=x$, будетъ $AE=AB-(BC)BE=x-b$, $AD=AB+BD=b+x$, и для подобныхъ треугольниковъ AEC и ACD, будетъ $AE:AC=AC:AD$, то есть $x-b:a=a:x+b$ (Часть II. § 104), при чемъ $a^2=(x+b).(x-b)=x^2-b^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $a^2+b^2=x^2$, то есть $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}$.

Слѣдствіе. Поскольку $a^2=(x+b).(x-b)$, по сему $\sqrt{a^2}=a=\sqrt{(x+b).(x-b)}=AC$. Изъ сего явствуетъ, что квадратъ какого нибудь бока изъ составляющихъ прямой уголъ равенъ произведенію изъ суммы и разности двухъ другихъ боковъ; слѣдовательно для высканія по извѣстной діAGONALI АВ и перпендикуляру BC, другого бока AC, надлежитъ только сумму боковъ АВ + BC умножить разностию тѣхъ же боковъ АВ - BC, тогда квадратной корень сего произведенія будетъ равенъ боку AC.

До-

Доказательство той же теоремы Геометрически (фигура 5).

Черезъ точку С проводи линію FD параллельно АВ; сдѣлай $CD=BC$; изъ точки D и чрезъ точку А проводи линіи DL и FH параллельно BC и равны DF; точки H и L соедини прямою линіею HL, то произшедшій отъ сего четырехугольникъ DFHL будетъ квадратъ; потомъ продолжи CB и AB до K и E; сдѣлай HI и $GL=CD$ или BC и проводи AI, IG и GC, отъ чего произойдетъ четыре равныхъ прямоугольныхъ треугольника AFC, AHI, ILG и GDC, изъ коихъ каждой равенъ половинѣ прямоугольника FB или BL, по сему $AFC+AH I+ILG+GDC=FB+BL$. Но какъ изъ начертанія видно, что ACGI есть квадратъ изъ діAGONALI AC; ибо въ равныхъ треугольникахъ AFC и AHI уголъ FCA=HAI, по сему уголъ ACF+FAC=HAI+FAC=90 град. слѣдовательно уголъ CAI=90 град. (Часть II. § 16). Такимъ же образомъ докажемъ, что и уголъ AIG=IGC=GCA=90°. Также доказать не трудно, что BCDE есть квадратъ изъ линій BC и ABKH есть квадратъ изъ линіи АВ; но поелику $FDLH$ или $FD=ACGI+AFC+AH I+ILG+GDC=BCDE+ABKH+FB+BL$; слѣдовательно когда изъ сихъ равныхъ количествъ вычтутся равныяжъ количества $AFC+AH I+ILG+GDC$ и $FB+BL$, то останется $ACGI=BCDE+ABKH$, то есть $\overset{-1}{AC}=\overset{-2}{BC}+\overset{-2}{AB}$.

Теорема. II. Во всякомъ треугольникѣ ABC, у котораго перпендикуляръ CD падаетъ на

Основаніе внутри треугольника, будетъ прямоугольникъ изъ суммы и разности боковъ AC и BC равенъ прямоугольнику изъ основанія AB и разности между двухъ отрезковъ AD и BD (фигура 6).

Доказател. Положимъ $AC=a$, $BC=b$, $DB=DF=c$, $AD=d$. Для прямоугольныхъ треугольниковъ ADC и DBC будетъ $a^2-d^2=DC^2$, также $b^2-c^2=DC^2$, по сему $a^2-d^2=b^2-c^2$, а по переставкѣ величинъ выйдетъ $a^2-b^2=d^2-c^2$; но $a^2-b^2=(a+b).(a-b)$, и $d^2-c^2=(d+c) \times (d-c)$; слѣдовательно $(a+b).(a-b)=(d+c) \times (d-c)$; но $d+c=AB$ и $d-c=AD-(DB)DF=AF$, по сему $(AC+BC) \times (AC-BC)=AB \times (AD-DB)$.

Слѣдств. Ежели сдѣлать $AF=BD$ и основаніе AB раздѣлить на двѣ равныя части въ точкѣ E (фигура 7), то будетъ $AD=BD$ или $AD-AF=FD=2ED$; по сей причинѣ выйдетъ $(a+b).(a-b)=AB \times 2ED$, то есть прямоугольникъ изъ суммы и разности боковъ AC и BC равенъ прямоугольнику изъ цѣлаго основанія AB и дважды взятаго разстоянія между перпендикуляромъ CD и серединою E основанія AB.

Теорема III. Во всякомъ треугольникѣ ABC, у котораго перпендикуляръ CD падаетъ внѣ треугольника, будетъ прямоугольникъ изъ суммы и разности боковъ AC и BC равенъ прямоугольнику изъ цѣлаго основанія AB и дважды взятаго разстоянія ED между перпендикуляромъ CD и серединою E основанія AB. (фигура 8).

До-

Доказательство. На продолженной АВ сдѣлай $AF=FD$ и положи $AC=a$, $BC=b$, $AD=d$, $BD=c$. И такъ для прямоугольныхъ треугольниковъ ACD и BCD будетъ $a^2-d^2=DC^2$, и $b^2-c^2=CD^2$, по сему $a^2-d^2=b^2-c^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $a^2-b^2=d^2-c^2$ или $(a+b)(a-b)=(d+c)(d-c)=(AD+BD) \times (AF-BD)=FD \times AB=2ED \times AB$; по сей причинѣ $(a+b)(a-b)=(AC+BC) \times (AC-BC)=2ED \times AB$.

Теорема. IV. Удвоенной квадратъ изъ линіи CE , проведенной изъ верха угла ACB на средину основанія AB , съ удвоеннымъ квадратомъ изъ половины основанія AE или BE равенъ суммѣ квадратовъ изъ двухъ боковъ AC и BC (фигура 9 я).

Доказательство. Положимъ $AC=a$, $BC=b$, $AE=BE=c$, $EC=d$, $ED=x$. По свойству треугольниковъ AEC и BCE , будетъ $a^2-(c^2+d^2)=2cx$ (Часть II. § 151); также $d^2+c^2-b^2=2cx$ (Часть II § 153), по сему $a^2-c^2-d^2=d^2+c^2-b^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $a^2+b^2=2d^2+2c^2$, то есть $AC^2+BC^2=2EC^2+2AE^2$ или $2BE^2$.

Задача I. Въ треугольникѣ ABC основаніе AC и высота ED извѣстны, найти бокъ вписаннаго въ немъ квадрата (фигура 10 я).

Рѣшеніе Алгебраическое. Положимъ $AC=a$, $BD=b$, бокъ квадрата $EF=HD=x$, EH будетъ $=b-x$. Для подобныхъ треугольниковъ ABC и BEF будетъ $a:x=b:b-x$ (Часть II. § 104); при чемъ $ab-ax=bx$ (§ 146), или $(b+x)x=ab$, откуда найдется $x=\frac{ab}{a+b}=EF=EH$.

Рѣшеніе Геометрическое. На продолженномъ основаніи AC положи $CO = BD$; попомѣ на линіяхъ AO и AC начерпни прямоугольники AN и AM , изъ коихъ бы высота перваго равна была боку GE вписаннаго квадрата, а послѣдняго равна высотѣ BD преугольника ABC , тогда будетъ прямоугольникъ $AM = AN$; ибо для подобныхъ преугольниковъ ABC и EBF будетъ $AC : (EF)EG = BD : BH$, при чемъ $AC \times BH = BD \times EG = CO \times ON$, а придавъ къ каждому изъ сихъ прямоугольникъ PC , будетъ $AN = AM = AC \times BD = GE \times (AC + BD)$. И такъ раздѣля площадь прямоугольника AN на AO , частное будетъ требуемый бокъ GF вписаннаго квадрата $GEFI$.

Прибавлен. Для начертанія въ данномъ преугольникѣ ABC квадрата $GEFI$ проводи BK параллельно AC и равну BD ; точки A и K соедини прямою линіею AK ; изъ точки F проводи FE параллельно AC ; а наконецъ изъ точекъ E и F , опустиевъ перпендикуляры EG и FI , будешь имѣть требуемой квадратъ: ибо для подобныхъ преугольниковъ ABK , AEF и ADB , AGF будетъ $AE : AB = GE : BD = EF : BK$; но $BD = BK$ по положенію, по сему и $GE = EF$.

Слѣдств. Такимъ же образомъ въ данномъ преугольникѣ ABC впишется прямоугольникъ, у котораго бы бока были въ данномъ содержаніи, естли только вмѣсто $BK = BD$ положимъ такъ, чтобы BD къ BK была въ данномъ содержаніи.

Задача. II. Въ преугольникѣ ABC основаніе AB и высота DC извѣстны, также площадь вписаннаго прямоугольника MK содержишя къ площади преугольника ABC , какъ $m : n$, найди высоту DN и основаніе LM прямоугольника MK (фигура 11).

Рѣшен. Алгебраич. Пусть будетъ высота $CD=a$, основаніе $AB=b$, высота DN прямоугольника $=x$. Для подобныхъ треугольниковъ ABC и CKI будетъ $(CD)a : (AB)b = (CN)a - x : KI = \frac{ab-bx}{a}$; по сей причинѣ $KI \times DN = (\frac{ab-bx}{a}) \cdot x = \frac{abx-bx^2}{a} = DN \times ML$; но $n:m = \frac{ab}{2} : \frac{abx-bx^2}{a}$, при чемъ $\frac{nabx-nbx^2}{a} = \frac{ma^2}{2}$; умножь каждую часть чрезъ 2 и на a , будетъ $2nabx-2nbx^2=ma^2$ или $2nbx^2-2nabx=-ma^2$; раздѣли на $2nb$, выйдетъ $x^2-ax=-\frac{ma^2}{2n}$, откуда найдется $x=\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4}-\frac{ma^2}{2n})}$.

Рѣшен. Геометрич. Составя слѣдующую пропорцію: $n:m=\triangle ABC:LKIM$, найдется площадь прямоугольника $LKIM$; потомъ раздѣля высоту CD въ точкѣ H пополамъ, опиши на линіи DH полкруга, въ коемъ проведя хорду FN равну HN , изъ точки F опусти на CD перпендикуляръ FGP такъ, чтобы GP была равна $\frac{1}{2}AB$; опусти перпендикуляръ PE , будетъ прямоугольникъ $KIML=$ прямоугольнику $DGPE$, котораго площадь раздѣля на основаніе DE или $\frac{1}{2}AB$, частное будетъ $=DG$; потомъ по известной DH и HG найдется $HF=HN$ (Часть II. § 174), и $DH+HN=DN$, почему сыщется и основаніе LM .

Доказат. Поскольку $DH:(HF)HN=NH:HG$ (Часть II. § 172), при чемъ $HN^2=DH \times HG$,

и $DH - (HN)HN = (DH + HN) \times (DH - HN) = FD$;
но $DH + HN = DN$, и DH или $HN - HN = CN$,

по сему $FD = DN \times CN = DH \times DG$ (Часть II. § 172); откуда произойдетъ слѣдующая пропорція: $DN : DG = DH : CN = \frac{1}{2}CD : CN$; но $\frac{1}{2}CD : CN = (\frac{1}{2}AB)DE : (KI)LM$, и для равенства содержаній будетъ $DN : DG = DE : LM$, при чемъ $DN \times LM = DG \times DE$, то есть прямоугольникъ $LKIM = DGPE$.

Прибавлен. I. Изъ сего яствуетъ, что по правиламъ Геометрическаго рѣшенія предложенной задачи можно будетъ въ данномъ треугольникѣ вписать прямоугольникъ, котораго бы площадь была въ данномъ содержаніи къ треугольнику или равна данному, на прямую Q ; ибо начертивъ на половинѣ основанія DE , какъ выше показано, прямоугольникъ DP равенъ данному Q (Часть II. § 293), послѣднее совершить уже не трудно; однакожь еѣ начертаніе тогда только учинить можно, когда данной прямоугольникъ Q , будетъ не больше половины площади треугольника ABC или когда высота DG прямоугольника $DGPE$ будетъ не больше DH или $\frac{1}{2}DC$; ибо въ противномъ случаѣ задача будетъ не возможна.

Прибавлен II. Въ данномъ треугольникѣ ABC (Чертежъ II. фиг. 12.) можно помѣнутой прямоугольникъ вписать равенъ данному Q и другимъ образомъ. Сперва начертивъ на основаніи AB прямоугольникъ $ABPL$ равенъ данному Q ; потомъ на линияхъ $СК$ и DC опиши два полукружія KMC и DNC ; изъ точки M , гдѣ первое полукружіе пересѣкаетъ основаніе AB , проводи MN параллельно къ CD , пока пересѣкается окружность послѣдняго въ N ; изъ точки N проводи NEF параллельно къ AB , будетъ MN высота требуемаго прямоугольника: ибо $\triangle ABC : ABPL = \frac{1}{2}CD : DK$ (Часть II § 139); также и прямоугольникъ $DI \times EF : DI \times IC = EF : IC = AB : CD$; но $AB : CD = DK \times AB : DK \times CD$; и такъ для равенства содержаній будетъ $DI \times EF : DI \times IC = DK \times AB : DK \times CD$; но какъ $DI \times IC = IN = DM = DK \times CD$, по сей причинѣ изъ предвѣдущей пропорціи видно, что $DI \times EF$

$\text{---DK} \times \text{AB} = \text{Q}$. Изъ сего начертанія такимъ же порядкомъ и обратно не трудно будетъ найти высоту и основаніе вписаннаго прямоугольника GFEN, еслибы только площадь оного будетъ извѣстна.

Задача III. Найди двѣ линіи, изъ коихъ бы сдѣланной прямоугольникъ равенъ былъ данному ABEF, и сумма ихъ квадратовъ равна данному квадрату ABCD (фигура 13).

Рѣшен. Алгебраич. Положивъ $\text{AB} = a$, $\text{BE} = b$, искомыя линіи x и y , будетъ ABEF $= ab$, $\text{AB} = a^2$, посредствомъ чего найдемся x и y , какъ въ XIII задачѣ смѣшаннаго квадратнаго уравненія показано.

Рѣшен. Геометрич. На линіи АВ описавъ полукруга AGB проведи BG и AG, которыя будутъ требуемыя линіи: ибо $2(\text{AG} \times \text{BG}) = \text{AB} \times \text{BE}$ (Часть II § 133); но дабы оныя линіи найти числами, то опусти перпендикуляръ GH, которой будетъ равенъ BE, по извѣстному поперешнику АВ и перпендикулярѣ HG, найдутся AG и GB, какъ въ второй части въ § 175 показано.

Задача IV. Двѣ хорды АВ и CD, перпендикулярно пересѣкающіяся въ точкѣ Е, и линія ОЕ изъ центра О въ точку сѣченія Е проведенная, извѣстны, найти въ кругѣ полупоперешникъ OD (фигура 14).

Рѣшен. Алгебраич. Изъ центра О круга на данныя хорды АВ и CD опусти перпендикуляры OF и OG и проведи полупоперешники ОА и OD. Теперь положимъ $\text{AF} = \frac{1}{2}\text{AB} = a$, $\text{DG} = \frac{1}{2}\text{CD} = b$, $\text{OE} = c$, и $\text{OD} = \text{AO} = x$. Для прямо-

уголь-

угольныхъ треугольниковъ AOF и DOG будетъ
 $\overline{OF}^2 = x^2 - a^2$, и $\overline{OG}^2 = x^2 - b^2$; но \overline{OF}^2 или \overline{GE}^2
 $+ \overline{OG}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{OE}^2$, то есть $2x^2 - (a^2 + b^2)$
 $= c^2$, откуда найдется $x = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 + b^2}{2}} = OD$
 $= AO$.

Рѣшен. Геометрич. На линѣ EO описавъ
 полкрута, проводи чрезъ точку F сѣченія ли-
 нѣю IFH перпендикулярно къ EO; изъ точки
 O величиною линѣю DG пересѣки линѣю IH въ
 точкѣ H, и проводи HE, которая равна будетъ
 AF; ибо \overline{AO}^2 или $\overline{OD}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{OF}^2 = (\overline{DG})^2 + \overline{HO}^2$
 $+ (\overline{OG})^2 + \overline{EF}^2$; но поелику $\overline{HE}^2 - \overline{EI}^2 = \overline{HO}^2 - \overline{OI}^2$
 $= \overline{HI}^2$, также $\overline{EF}^2 - \overline{EI}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{IF}^2$; вы-
 чти послѣднія величины, изъ первыхъ оста-
 нется $\overline{HE}^2 - \overline{EF}^2 = \overline{HO}^2 - \overline{OF}^2$; потомъ придай къ
 обѣимъ изъ сихъ величинъ \overline{EF}^2 и \overline{OF}^2 , выйдетъ
 $\overline{HE}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{HO}^2 + \overline{EF}^2$. Изъ сего видно, что
 $\overline{AF}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{OF}^2$; но $\overline{OF}^2 = \overline{OF}^2$, по сему
 $\overline{AF}^2 = \overline{HE}^2$; и $AF = HE$. Теперь по извѣстнымъ
 бокамъ треугольника ONE сыщется отрѣзокъ EI
 (Частъ II. § 154); потомъ по извѣстному
 отрѣзку OI и поперещнику OE найдется хорда
 OF, которая, будучи перпендикулярна къ AB, раз-
 дѣляетъ оную на двѣ равныя части; наконецъ
 въ прямоугольномъ треугольникѣ AOF по из-

вѣстнымъ бокамъ OF и AF найдется требуемой полупоперешникъ $AO = OD$.

Задача V. Полупоперешники OA и OC concentрическихъ круговъ и содержаніе хорды CD къ AB извѣстны, найди хорду CD и AB (фиг. 15).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ полупоперешникъ $AO = a$, $CO = b$, перпендикуляръ $OE = x$ и $CD : AB = n : m$. будетъ $\overline{AO} - \overline{OE} = \overline{AE}$, и $\overline{CO} - \overline{OE} = \overline{CE}$, то есть $a^2 - x^2 = \overline{AE}^2$, и $b^2 - x^2 = \overline{CE}^2$; но поелику $n : m = CD : AB = CE : AE$, то будетъ $\overline{CE} : \overline{AE} = n^2 : m^2 = b^2 - x^2 : a^2 - x^2$, при чемъ $n^2 a^2 - n^2 x^2 = m^2 b^2 - m^2 x^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $m^2 x^2 - n^2 x^2 = m^2 b^2 - n^2 a^2$; откуда найдется $x = \sqrt{\frac{m^2 b^2 - n^2 a^2}{m^2 - n^2}} = OE$; наконецъ по извѣстной EO и полупоперешникамъ AO и CO найдется AE и CE (теорема I.) и $2AE = AB$, также $2CE = CD$.

Рѣшен. Геометрич. Пусть $CD : AB$ или $\frac{1}{2}CD : \frac{1}{2}AB = 5 : 9$, то есть $EC : AE = 5 : 9$, по сему будетъ $EC : AC = 5 : 4$. Изъ точки A хорды AB поставъ перпендикуляръ AF , пока пересѣчется съ продолженнымъ полупоперешникомъ OC въ точкѣ F : то въ разсужденіи прамыхъ угловъ OEC и CAF треугольники COE и CAF будутъ подобны, и для того $EC : AC = OC : CF = 5 : 4$; и такъ сдѣлавъ пропорцію $5 : 4 = OC : CF$ откуда найдется CF ; потомъ на линіи FC опиши полукруга CAF , проводи полупоперешникъ AG , который будетъ равенъ $\frac{1}{2}FC = CG$,

и $CG + OC = OG$; въ треугольникѣ AOG сыщи высоту AN (Часть II § 152), при чемъ и CN будетъ известна, и чрезъ то найдется AC (Часть I § 146). Для подобныхъ треугольниковъ ACN и OCN сдѣлай слѣдующую пропорцію $AC : CO = CN : CE$, и наконецъ будетъ $CE + AC = AE$, почему найдется и требуемая величина хордъ CD и AB .

Задача VI. По известному полупоперешнику OD большого круга найти полупоперешникъ BD одного изъ равныхъ круговъ, вписанныхъ въ большомъ кругу, касающихся между собою и окружности большого круга (фигура 16 я).

Рѣшен. Алгебраич. Центры вписанныхъ круговъ соедини прямыми линіями AB , AF и BF , продолжи AO до E и DO до C , отъ чего произойдутъ треугольники BCF и BOE подобны: ибо уголъ $BCF = \angle BOE$ прямые, и уголъ FBC общій, того для будетъ $BF : BO = CF : EO$; но $CF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}AF$, по сему $EO = \frac{1}{2}OB$. И такъ положимъ полупоперешникъ OD большого круга $= a$, $BD = EB = x$, будетъ $BO = a - x$, $EO = \frac{a - x}{2}$. И такъ для прямоугольнаго треугольника EOB , будетъ $EO^2 + EB^2 = BO^2$, то есть $(\frac{a - x}{2})^2 = x^2 + (\frac{a - x}{2})^2$, или $a^2 - 2ax + x^2 = \frac{5x^2 - 2ax + a^2}{4}$, а по умноженіи чрезъ 4 и по сокращеніи членовъ выйдетъ $x^2 + 6ax = 3a^2$, откуда найдется $x = -3a \pm \sqrt{12a^2} =$ требуемому полупоперешнику $EB = DB$.

Рѣ.

Рѣшен. Геометрич. Чрезъ концы D, M и N проводи перпендикулярно линѣи GH, HK и GK, кои взаимно пересѣкшися, изобразятъ равносторонной треугольникъ GHK; потомъ изъ точки H проводи въ центръ B вписаннаго круга линѣю HB, отъ чего произойдетъ $\triangle DBH = \triangle BLH$; ибо $DB = BL$, HB общая, и уголъ $BDH = BLH$ прямые, по сему и уголъ $DHB = BHL$; потомъ по известному полупересѣнику OD большого круга сынци половину бока $CH = HD$ (Часть II § 206); также въ прямоугольномъ треугольникѣ ODH по известнымъ OD и DH найдется HO (теорема 1); наконецъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: $OH + HD : HD = OD : DB$ (Часть II § 120).

Слѣдств. Изъ сего удобно видѣть можно, что для начертанія трехъ равныхъ круговъ въ данномъ кругѣ, коихъ бы окружности касались между собою и окружности большого круга, надлежитъ сперва около даннаго круга описать равносторонной треугольникъ (GHK Часть II § 206); потомъ проводи изъ центра O полупересѣники OG, OH и OK, продолжи оныя до M, N и D; раздѣли уголъ DHO на двѣ равныя части линѣю HB, которая пересѣкнется съ OD въ точкѣ B, опредѣливъ центръ вписываемаго круга, коего полупересѣникъ DB будетъ равенъ $BL = LA$ и проч.

Прибавлен. Посредствомъ сего правила въ данномъ кругѣ легко вписать можно, сколько потребно будетъ равныхъ круговъ, коихъ бы окружности касались между собою и окружности даннаго круга; ибо надлежитъ только сперва около даннаго круга описать правильной многоугольникъ, имѣющій столько боковъ, сколько шѣлъ круговъ вписать потребно будетъ, какъ здѣсь описанъ квадратъ CEGF (фиг. 17); а потомъ проводи изъ центра A косые и прямые полупересѣники AC, AE, AB, AN и проч. раздѣли половину угла многоугольника ACB на двѣ равныя части линѣю CD, отъ пресѣченія которой съ линѣю AB точка D будетъ центръ, а DB полупересѣникъ презуемыхъ круговъ; потомъ опустя изъ точки D на AC перпендикуляръ DLI, будетъ $DB = DL = IL = NI$ и прочая.

Задача VII. Въ квадратѣ ABCD части DE и GB, боковъ CD и AB и линія GE, соединяющая точки E и G, известна, найти бокъ квадрата AD (Фигура 18).

Рѣшен. Алгебраич. Проведи DF параллельно GE и продолжи AB до F, будетъ $DE=FG$. Теперь положимъ $DE=FG=a$, $GB=b$, $EG=DF=c$, $AG=x$, будетъ $BG+AG=AB=AD=b+x$, $FG-AG=AF=a-x$. И такъ для прямоугольнаго треугольника ADF будетъ $AD^2 + AF^2 = FD^2$, то есть $(b+x)^2 + (a-x)^2 = c^2$, или $2x^2 + (2b - 2a)x + b^2 + a^2 = c^2$ а по переставкѣ величинъ и по раздѣленіи на 2 выйдетъ $x^2 + (b-a)x = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2}$, откуда найдется $x = \frac{a-b + \sqrt{(2c^2 - b^2 - a^2 - 2ab)}}{2} = AG$, и напоследокъ будетъ $BG+AG=AB=AD$. Такимъ же образомъ найдется бокъ квадрата, ежели меньшія части ЕС и AG будутъ известны.

Рѣшен. Геометрич. Поелику $DE=FG$, то будетъ $GB+FG=FB=FA+AB=FA+AD$; по сему въ прямоугольномъ треугольникѣ FAD діагональ FD и сумма двухъ боковъ $FA+AD$ будучи известны, найдутся порознь AD и AF (Часть II. § 177). Ежелижъ даны будутъ малыя части ЕС и AG, то опустивъ перпендикуляръ HN, изъ центра Н полупересѣнникомъ HG опиши дугу GI, и для того будетъ $ЕС=НВ$, и $НВ+ГН+АГ=АВ=ЕН$, но $НГ=НІ$, по сему $НІ+НВ+АГ=НЕ$, следовательно

ващелъно $HE - HI = HB + AG = AG + EC = EI$. Изъ сего видно, что въ прямоугольномъ треуголь- никѣ HEG діагональ GE и разность боковъ $EH - GH = H - HI = EI$, будучи извѣстны, най- дется бокъ HE и GH (Частъ II. § 150).

Задача VIII. Въ прямоугольномъ треугольни- кѣ ABC проведенныя отъ концовъ B и C діаго- нали BC въ средину другихъ боковъ линіи BD и CE извѣстны, найти каждой бокъ треуголь- ника ABC (фигура 19).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $AE = EB = x$, $AD = DC = y$, $DB = a$, $CE = b$. Для прямоуголь- ныхъ треугольниковъ AEC и ABD , будетъ $x^2 + 4y^2 = b^2$ и $y^2 + 4x^2 = a^2$, вычти первое ура- вненіе изъ послѣдняго, чепырежды взятого, остатокъ будетъ $15x^2 = 4a^2 - b^2$, а по раздѣ- леніи на 15 выйдетъ $x^2 = \frac{4a^2 - b^2}{15}$, откуда най- дется $x = \sqrt{\left(\frac{4a^2 - b^2}{15}\right)} = AE$, потомъ по извѣ- стнымъ линіямъ AE и EC найдется AC и діагональ BC .

Рѣшен. Геометрич. Поелику $AC + AE = EC$
 $= 4AD + AE$; также $AB + AD = BD$, или $4AE$
 $+ AD = BD$ по сему сумма квадратовъ EC
 $+ BD = 5AE + 5AD$, а по раздѣленіи на 5 вый-
детъ $\frac{1}{5}EC + \frac{1}{5}BD = AE + AD$, которое вычти
изъ $BD = 4AE + AD$, остатокъ будетъ BD

ъ

$\frac{1}{3}(CE + BD) = AE$, а по раздѣленіи на 3 частное будетъ $= AE$; наконецъ изъ площади сего квадрата извлеки квадратной корень, получишь $AE = \frac{1}{2}AB$, посредствомъ чего найдется и прочія части треугольника.

Задача IX. Въ треугольникѣ ABC величина линій AE , BD и CF , проведенныхъ изъ угловъ A , B и C въ половину противоположенныхъ боковъ извѣстна, найди каждой бокъ треугольника ABC (фигура 20 я).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $CF = a$, $BD = b$, $AE = c$, $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$. По свойству предложеннаго треугольника ABC будетъ $AC + BC = 2CF + 2AE$ (Теорема IV.), то есть $x^2 + z^2 = 2a^2 + \frac{y^2}{2}$, или $x^2 + z^2 - \frac{y^2}{2} = 2a^2$.

Такимъ же образомъ най-
 дется $\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 2c^2 \\ y^2 + z^2 - \frac{x^2}{2} = 2b^2; \end{cases}$
 вычти первое уравненіе изъ удвоенной суммы двухъ послѣднихъ, оспанется $4y^2 + \frac{y^2}{2} = 2(2c^2 + 2b^2 - a^2)$ или $9y^2 = 4(2c^2 + 2b^2 - a^2)$, откуда найдется $3y = 2\sqrt{(2c^2 + 2b^2 - a^2)}$, а по раздѣленіи на 3 выйдетъ $y = \frac{2}{3}\sqrt{(2c^2 + 2b^2 - a^2)}$. Такимъ же образомъ найдется $x = \frac{2}{3}\sqrt{(2c^2 + 2a^2 - b^2)}$, и $z = \frac{2}{3}\sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)}$.

Рѣшен. Геометрич. Продолживъ AB въ обѣ стороны, проводи изъ точки C линіи CH и CI параллельно AE и DB ; но поскольку $CE = BE$
и CD

и $CD=AD$, то будетъ $АН=АВ=ВІ$; по сему $НС=2АЕ$, $СІ=2ВD$ и $НІ=3АВ$; и такъ два бока $Н$, $СІ$ и линия $СF$, раздѣляющая основаніе треугольника $СНІ$ пополамъ, будутъ извѣстны, въ которомъ $\overline{СН}^2 + \overline{СІ}^2 = 2\overline{СF}^2 + 2\overline{НF}^2$, или $\overline{СН}^2 + \overline{СІ}^2 - 2\overline{СF}^2 = 2\overline{НF}^2$, а по раздѣленіи на 2 выйдешъ $\frac{1}{2}(\overline{СН}^2 + \overline{СІ}^2 - 2\overline{СF}^2) = \overline{НF}^2$; по сему извлеки квадратной корень изъ $\overline{НF}^2$, получишь $\overline{НF}$, и наконецъ будетъ $\frac{2}{3}\overline{НF} = АН = АВ$. Такимъ же образомъ найдутся и прочіе бока.

Или

Продолживъ $СF$ сдѣлай $FG=CF$ и проведя $ГН$ и $ГІ$. изобразится параллеллограмъ $ГНСІ$, въ которомъ бока $ГІ=СН$, $НГ=СІ$ и діогональ $СГ$ будучи извѣстны, найдется діогональ $НІ$ (Частъ II. § 168); а наконецъ $\frac{2}{3}НІ=АВ$. Такимъ же образомъ найдутся и бока $АС$ и $СВ$.

Задача X. Площадь квадрата $ВЕD F$, вписаннаго въ прямоугольномъ треугольникѣ $АВС$, равна площади треугольника ADC , и припомъ бока $АВ$ и $ВС$ извѣстны, найми бока квадрата $ВF$ (фигура 21 я).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $АВ=a$, $ВС=b$, $ВF=x$, будетъ $АF=a-x$, $СЕ=b-x$; но какъ $\triangle ABC = \triangle BFE + \triangle ADF + \triangle DEC + \triangle ADC$, то есть $x^2 + (\frac{a-x}{2})x + (\frac{b-x}{2})x + x^2 = \frac{ab}{2}$, а по сокращеніи членовъ выйдешъ $2x^2 + (a+b)x = ab$, которое

Бъ 2

раз-

раздѣливъ на 2, будетъ $x^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)x = \frac{ab}{2}$, откуда найдется $x = \frac{\sqrt{(a^2 + 10ab + b^2)} - a - b}{4} = BF$.

Рѣшен. Геометрич. Сперва надлежитъ показать, какимъ образомъ такого свойства квадратъ въ данномъ треугольникѣ АВС вписать можно: для сего начерти въ треугольникѣ АВС квадратъ ВНСІ (Задача I.); потомъ продолживъ АВ, сдѣлай ВК равну полсуммѣ боковъ АВ и ВС; раздѣли ВН на двѣ части такъ, чтобы одна часть ІГ была средняя пропорціональная между другою частію НГ и линіею ВК (Часть II § 302), будетъ ВГ равна боку пребумаго квадрата ВДІ; ибо $\triangle ADC : ABC$ или $\frac{AB \times BC}{2} = GD : IG = HF : HB$; но $HB \times (AB + BC) = AB \times BC$ (Задача I), по сему $\triangle ADC : \frac{HB \times (AB + BC)}{2} = HF :$
 $HB = HF \times \frac{AB + BC}{2} : HB \times \frac{AB + BC}{2}$; и такъ для равенства содержаній будетъ $ADC : HB \times \frac{AB + BC}{2} = HF \times \frac{AB + BC}{2} : HB \times \frac{AB + BC}{2}$. Но когда послѣдующіе члены равны, то и предъидущіе равны, то есть $ADC = HF \times \left(\frac{AB + BC}{2}\right) = HF \times BK = BF^2$ (Часть II. § 302). Теперь посредствомъ первой задачи същется бокъ ВН вписаннаго квадрата ВНСІ; потомъ по извѣстной ВГ и $BM = \frac{1}{2}BK$ найдется $MN = MF$, и $MF - BM = BF =$ пребуемому боку квадрата.

Задача XI. Извѣстна діагональ АС прямоутого треугольника АВС, и разность АВ линій

линій AD и DC, отъ концовъ діагонали въ центрѣ вписаннаго круга проведенныхъ, найди прочіе бока треугольника (фигура 22 я).

Рѣшен. Алгебраич. На продолженную CD опусти перпендикуляръ АН. Положимъ $AC=a$, $AD=x$, $CD=y$, данная разность $x-y=b$ или $x-b=y$. Изъ сего видно, что уголъ $ADH = \angle DAC + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle BAC =$ половинѣ праматаго угла \neq углу HAD , по сему $DH=AH$; но поелику $\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2 = 2\overline{DH}^2$, то по раздѣленіи на 2 выйдетъ $\overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{AD}^2$, и $DH = \sqrt{\frac{\overline{AD}^2}{2}} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = AH$; но для тупоугольнаго треугольника CAD будетъ $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2HD \times CD = \overline{AC}^2$, то есть $y^2 + x^2 + \frac{2yx}{\sqrt{2}} = a^2$; поставь въ сѣмъ уравненіи $x-b$ вмѣсто y , и c вмѣсто $\sqrt{2}$, то уравненіе изобразится такимъ образомъ: $x^2 - 2bx + b^2 + x^2 + \frac{2x^2 - 2bx}{c} = a^2$, а по умноженіи чрезъ c и по сокращеніи членовъ выйдетъ $2cx^2 + 2x^2 - 2cx - 2bx = a^2 - b^2$, или $(2c+2)x^2 - (2c+2)bx = a^2 - b^2$; раздѣли на $2c+2$, частное будетъ $x - bx = \frac{ca^2 - cb^2}{2c+2}$, откуда найдется $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{ca^2 - cb^2}{2c+2} + \frac{b^2}{4})} = AD$, почему и прочее найти уже не трудно, какъ изъ слѣдующаго Геометрическаго рѣшенія видно.

Рѣшен. Геометрич. Поелику извѣстно, что уголъ $ADH = 45^\circ = \angle DCE + \angle DEC$, и $CD=DE$,

по сему уголъ $\text{DEC} = \text{DCE} = \frac{1}{2} \text{ADH} = 22\frac{1}{2}$ град.: и такъ продолживъ CE , опусти на оную перпендикуляръ AI ; сдѣлай $\text{IK} = \text{AI}$ и проводи EK , будетъ уголъ $\text{DEC} = \text{AEI} = \text{KEI}$, по сему уголъ $\text{AEK} = 45$ град. Изъ сего удобно видѣть можно, что AE есть полупоперешникъ такого круга, въ которомъ AK будетъ бокъ восьмиугольника, коего величина посредствомъ § 251. Второй Части сыскана бытъ можетъ; потомъ раздѣля AK на двѣ равныя части, получишь AI ; по известной AE и AI найдется EI ; также въ прямоугольномъ треугольникѣ ACI съется CI , и $\text{CI} - \text{EI} = \text{CE}$. Теперь изъ центра D вписаннаго круга опусти на CE и AC перпендикуляры DG и DF , будетъ $\text{EG} = \frac{1}{2} \text{EC}$; потомъ для подобныхъ треугольниковъ AEI , EDG сдѣлай слѣдующую пропорцію: $\text{EI} : \text{EG} = \text{AE} : \text{DE}$; наконецъ въ треугольникѣ ADC найдется перпендикуляръ DF и отрезки AF и CF (Часть II. § 154); будетъ $\text{CF} = \text{CL}$, $\text{AF} = \text{AM}$ касательныя, и $\text{DF} = \text{DL} = \text{DM}$, полупоперешники вписаннаго круга, по сему $\text{CF} + \text{DF} = \text{EC}$, и $\text{AF} + \text{DF} = \text{AB}$.

Задача XII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC , сумма боковъ $\text{AB} + \text{BC}$ составляющихъ прямой уголъ ABC , и перпендикуляръ BD известны, найди каждой бокъ треугольника порознь (Чертежъ III. фигура 23).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $\text{AB} + \text{BC} = a$, $\text{BD} = b$, $\text{AB} = x$, $\text{BC} = y$, $\text{AC} = z$, будетъ $a = x + y$. И такъ $(\text{AB} + \text{BC})^2 = x^2 + y^2 + 2xy = a^2$ (A); но для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overset{-2}{\text{AB}} + \overset{-2}{\text{BC}} = \overset{-2}{\text{AC}}$, то есть $x^2 + y^2 = z^2$,
также

также $xу = bz$ (потому что половина каждо-
го изъ сихъ произведеній означаетъ одну и ту-
же площадь треугольника АЕС). Теперь поста-
вя сии послѣднія величины въ уравненіи А вмѣ-
сто равныхъ количествъ, выйдетъ $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2bz = a^2$, откуда найдется $z = -b \pm \sqrt{a^2 + b^2}$; а наконецъ и прочіе бока АВ и ВС треугольника АВС сысканы быть могутъ.

Рѣшен. Геометрич. Продолживъ СВ сдѣлай
 $BF = AB$, начерти на CF квадратъ CFGH;
потомъ на діагонали AC изобрази прямоуголь-
никъ AQ, котораго бы бокъ AP былъ равенъ
 $2BD + AC$; изъ точки Р полупересечениемъ PQ
опиши дугу QM, будетъ $PQ = AC$ и $MA = 2BD$. Изъ сего начертанія видно, что $IKNR = BC$, $BFLI = AB$, и прямоугольникъ $CI = IG = AB \times BC = BD \times AC$, по сему $CF^2 = IKNR + BFLI + CI + IG = BC^2 + AB^2 + 2AB \times BC = AC^2 + 2BD \times AC = (MA + MP) \times AC = AP \times AC =$ извѣ-
стной площади квадрата CFGH; и такъ пло-
щадь прямоугольника AQ и разность боковъ
 $AP - PQ = AM = 2BD$ извѣстны, слѣдовательно
найдется $PQ = AC$ (Часть II § 179); наконецъ
по извѣстной AC, BD и суммѣ боковъ $AB + BC$
сыщется каждой бокъ порознь (Часть II § 177).

Задача XIII. Въ прямоугольномъ треу-
гольникѣ ABC высота BE и разность DC боковъ АВ
и ВС, соспавляющихъ прямой уголъ, извѣстны,
найди AC, АВ и ВС (фиг. 24 я).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $BE = a$, разность $CD = BC - AB = b$, $AB = BD = x$, $AC = y$, будетъ $BC = x + b$. Для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $AB^2 + BC^2 = AC^2$, то есть $2x^2 + 2bx + b^2 = y^2$; но поелику $BC \times AB = AC \times BE$, то есть $(x+b)x = ay$, по сему $2x^2 + 2bx = 2ay$; и такъ поставя въ предѣдущемъ уравненіи $2ay$ вмѣсто $2x^2 + 2bx$, будетъ $2ay + b^2 = y^2$ или $y^2 - 2ay = b^2$, откуда найдется $y = a \pm \sqrt{b^2 + a^2}$; попомъ по извѣстной AC , DC и BE , уже не трудно будетъ найти AB и CB .

Рѣшен. Геометрич. На боку BC начерти квадратъ $BCGF$, въ которомъ проведя діагональ CF , изъ точки D пропяти черту DLK параллельно BF , и чрезъ точку L линію XS параллельно BC , также на боку AC изобрази квадратъ $ACQO$; сдѣлай $CM = 2BE$; проведи MP параллельно OQ ; сдѣлай $QR = CM$, будетъ $OR = OP$. И такъ въ разсужденіи прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $AB^2 + BC^2 = AC^2$; но поелику $AB = SG$; то будетъ прямоугольникъ $BK + KI + DS = AM + MO$; но какъ $(BD + DC) \times (AB)BD = BE \times AC = BD \times BF = LK \times LI$, по сему $BK + KI = (2BE) CM \times AC$, слѣдовательно $BK + KI + CD = AM + MO$; но $BK + KI = AM$, по сей причинѣ $D =$ площади прямоугольника $PMQO$, въ которомъ разность QR боковъ OQ и $OP = 2BE$ извѣстна, найдется онаго бокъ $MP = AC$ (Часть II § 179); а наконецъ по извѣстному основанію AC и разности

ности DC боковъ АВ и ВС сыщется каждой бокъ АВ и ВС.

Задача XIV. Въ прямоугольномъ преутольни-
кѣ ABC извѣсны разности DC и AE между
діагональю AC и боками АВ и ВС, найти ка-
ждой бокъ преутольника ABC (фигура 25).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $AE=a$, $DC=b$, и разность $ED=x$, то будетъ $AD=AB=a+x$, $CE=BC=b+x$, и для прямоугольнаго преутольника ABC будетъ $AB^2+BC^2=AC^2$, то есть $(a+x)^2+(b+x)^2=(a+b+x)^2$, или $2x^2+2ax+2bx+a^2+b^2=x^2+2ax+2bx+2ab+a^2+b^2$, а по сокращеніи членовъ и по раздѣленіи на 2 выйдетъ $x^2=2ab$, откуда найдется $x=\sqrt{2ab}$.

Рѣшен. Геометрич. На діагонали AC начерти квадратъ ACQN; проводи діагональ NQ, а изъ точекъ D и E проводи линіи DP и EO параллельно AN, и чрезъ точки G и K линіи FH и MI параллельно AC. Изъ сего начертанія видно, что $BC^2=CE^2=ECMK=ECMLGR+(RGLK)ED^2$; также $AB^2=AD^2=FGPN=FRKLPN+(RGLK)ED^2$; по сему $AB^2+BC^2=AC^2=ECMLGR+FRKLPN+2ED^2$; но $AC^2=ECMLGR+FRKLPN+(RGLK)ED^2+AR+LQ$, по сему $AC^2=ECMLGR+FRKLPN+2ED^2=ECMLGR+FRKLPN+ED^2+AR+LQ$, а по отнятіи

равныхъ количествъ оспланеися $ED = AR + LQ = 2AR$; но поелику въ прямоугольникѣ AR боки $ER = DG = DC$ и AE извѣстны, почему и площадь онаго будетъ извѣстна, и пакъ умноживъ площадь сего прямоугольника чрезъ 2, получишь площадь квадрата $RGLK = ED^2$, котораго квадратной корень $= ED$, а наконецъ $AE + ED = AB$, и $DC + ED = BC$.

Задача XV. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ $AB + BC + AC$ и площадь онаго извѣстны, найди каждой боки пропорзъ (фиг. 26).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ площадь треугольника $ABC = d^2$, боки $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$, и сумма боковъ $x + y + z = b$, откуда найдемся $x + y = b - z$ (А). Для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $AB + BC = AC$, то есть $x^2 + y^2 = z^2$, и $xy = 2d^2$, придай удвоенное послѣднее уравненіе къ первому, будетъ $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 4d^2$, а по извлеченіи квадратнаго корня выйдетъ $x + y = \sqrt{z^2 + 4d^2} = b - z$; возвысь части сего уравненія во вторую степень, выйдетъ $z^2 + 4d^2 = b^2 - 2bz + z^2$ или $2bz = b^2 - 4d^2$, а по раздѣленіи на $2b$ найдемся $z = \frac{b^2 - 4d^2}{2b}$, посредствомъ чего найдутся и и прочіе бока треугольника ABC .

Рѣшен. Геометрич. Продолживъ діагональ AC въ обѣ стороны, сдѣлай $CE = BC$, и $AD = AB$; начерти на линіи DE квадратъ $DQTE$, въ которомъ проведя діагональ EQ , протяни къ DQ параллельныя линіи AR и CS , а чрезъ точки

I и N линѣи KG и MP параллельно кѣ DE, при чемъ произойдетъ $QMNR = \overline{AD} = \overline{AB}$, $NHIO = \overline{AC}$, $CIKE = \overline{BC}$ и $GDAH =$ удвоенной площади треугольника ABC; но какъ $DE = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$, то раздѣля известную площадь квадрата DETQ на двѣ равныя части, будешь имѣть площадь треугольника EDQ, изъ которой вычтя удвоенную площадь треугольника $ABC = GDAH$, останется площадь многоугольника QGHAEQ; но поелику прямоугольникъ HC = прямоугольнику OK, и сумма треугольниковъ $ICE + QMN = \triangle NOI$ (потому что сумма квадратовъ $ICEK + QMNR = NHIO$), по сему площадь прямоугольника $MGKP = QGHAEQ$ будучи известна, и основаніе онаго $MP = DE = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$ также известно, найдется высота $HN = \overline{HI} = \overline{AC}$, и наконецъ по известной площади треугольника ABC, діагонали AC и суммѣ боковъ $\overline{AB} + \overline{BC}$ сыщется BF, AB и BC (Часть II § 138 и 175).

Задача. XVI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC положеніе и величина прямой линѣи ED параллельной кѣ AB дана, также и части CD и BD известны, найди на линѣи ED точку G, чрезъ которую бы изъ верьха C угла ACB проведенную линѣю CF опрѣзанная часть GE равна была GF (фиг. 27).

Рѣшен. Алгебраич. Опустивъ на AB перпендикуляръ GH положимъ $CD = b$, $ED = a$, $DB = GH = c$, $FG = EG = x$, будетъ $GD = a - x$. Для подобныхъ треугольниковъ CGD и FGH будетъ $b : c = a - x : FH$, откуда найдется FH

$FN = \frac{(c-x)c}{b}$. Въ разсужденіи жъ прямоугольнаго
треугольника FGN будетъ $FG^2 = GN^2 + NF^2$
то есть $x^2 = c^2 + \frac{c^2(a-x)^2}{b^2}$, изъ чего выйдетъ
 $x^2 + \left(\frac{2cc^2}{b^2 - c^2}\right)x = \frac{(b^2 + a^2)c^2}{b^2 - c^2}$, откуда найдется
 $x = \frac{bc\sqrt{(b^2 + a^2 - c^2) - cc^2}}{b^2 - c^2}$.

Рѣшен. Геометрич. Положи $EI = DB$; изъ
точки I, взятой за центръ, разстояніемъ CD пере-
сѣки ЕС въ точкѣ К, и проводи ІК; потомъ
изъ точки С проводи прямую линію CGF па-
раллельно KI, то будетъ $EG = FG$; ибо для
подобныхъ треугольниковъ CGD и CFB, $CG:GF$
 $= CD:(DB)EI$; а для подобныхъ треугольни-
ковъ FIK и GCE будетъ $(IK)CD:EI = GC:GF$,
по сему $CG:GF = CG:GE$; но $CG = CG$, слѣдова-
тельно $GF = GE$.

Задача. XVII. Площадь треугольника ABC,
основаніе AB, и сумма боковъ AC + BC извѣ-
стны, найти бокъ AC и BC. (Фигура 28).

Рѣшеніе Алгебраич. Въ данномъ треуголь-
никѣ ABC начерти сперва кругъ FDE; по-
томъ на продолженной СА сдѣлай $АН = F$,
будетъ $HC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$, и $HD = AB$. (Часть
II § 155 Слѣд. 1), по сему $HC - (HD)AB = CD$.
Теперь положимъ площадь треугольника ABC
 $= a$, основаніе $AB = HD = b$, $HC = c$, $HC - (HD)AB$
 $= DC = d$, $AD = x$, будетъ $HD - AD = AN =$
 $b - x$. По свойству треугольника ABC будетъ
 $\sqrt{(b-x)xd} = a$ (Часть II § 156); умножь
каждую часть сего уравненія квадратно, вый-
детъ

дѣлѣ $bdcx - dcx^2 = a^2$ или $dcx^2 - bdcx = -a^2$, а по раздѣленіи на dc выйдетъ $x^2 - bx = -\frac{a^2}{dc}$, откуда найдется $x = \frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{dc})} = AD$; по сему $AD + DC = d + \frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{dc})} = AC$.

Рѣшеніе Геометрическое смотри во Второй Части § 194.

Задача. XVIII. На данной по положенію линіи DE найти точку С, изъ которой бы разность проведенныхъ линій AC и BC къ даннымъ точкамъ А и В равна была данной линіи PQ (Чертежъ IV фигура. 29.)

Рѣшеніе. Раздѣли линію АВ на двѣ равныя части въ точкѣ F; потомъ сыскавъ третью пропорціональную линію къ 2AB и къ данной PQ, положи оную отъ F до G; сдѣлай $GI = PQ$; изъ точекъ I и G проводи линіи GH и IK перпендикулярно къ АВ, и соединивъ точки А и H прямою линіею АН, изъ точки К величиною линіи АВ пересѣки продолженную НА въ точкѣ L, проводи LK, и AC параллельно LK, которая данную линію DE пресѣчетъ въ требуемой точкѣ С.

Доказател. Проведя СМ перпендикулярно къ АВ, будетъ LK параллельна AC, также HI, СМ и HG параллельны между собою; по сей причинѣ будетъ IL или $AB : AC = HN : CH = (GI)PQ : MG$ (Часть II § 104 Слѣдств. III), и для равенства сихъ содержаній будетъ $AB : AC = PQ : MG$, при чемъ $AP \times MG = PQ \times AC$; также $2AB : PQ = PQ : FG$ по рѣшенію, откуда най-

дется

дѣтся $AB \times FG = \frac{1}{2} PQ$; по сему сумма помянутыхъ произведеній будетъ $AB \times MG + AB \times FG = PQ \times AC + \frac{1}{2} PQ$. Изъ сего видно, что $AB \times MG + AB \times FG = AB \times (MG + FG) MF$, слѣдственно $AB \times MF = AC \times PQ + \frac{1}{2} PQ$, а по умноженіи чрезъ 2 выйдетъ $2AB \times MF = 2AC \times PQ + PQ$; но $2AB \times FM = BC - AC$ (Теорема II слѣдс.), по сему $2AC \times PQ + PQ = BC - AC$ а придавъ къ обѣимъ частямъ AC , будетъ $AC + 2AC \times PQ + PQ = BC$ или $(AC + PQ)^2 = BC$; слѣдовательно $AC + PQ = BC$, и наконецъ $BC - AC = PQ$.

Задача. XIX. На окружности даннаго круга CED найди точку Е, въ копорую ежели опъ концовъ А и В данной линіи АВ проведенъ линіи АЕ и ВЕ, то бы линія CD, соединяющая точки сѣченія С и D, была параллельна данной по положенію линіи АВ (фигур. 30.)

Рѣшеніе. Изъ середины данной линіи АВ поставь перпендикуляръ FG, на копоромъ по предъидущей задачѣ сыщи точку I, такъ чтобы разность линій AI и HI, проведенныхъ изъ центра Н и опъ конца А линіи АВ, равна была полуоперешнику НР даннаго круга; потомъ продолживъ линію IH до пресѣченія съ окружностію даннаго круга въ точкѣ Е, проводи изъ сей точки линіи АЕ и ВЕ; наконецъ соедини точки С и D прямою линіею CD, то оная будетъ параллельна данной АВ.

Дока-

Доказател. Для равныхъ треугольниковъ $\triangle AIF$ и $\triangle FVI$ будетъ $FI=AI$, также $AI=EI$; ибо $AI=HI=HP=HE$ по рѣшенію, а придавъ къ обѣимъ частямъ HI , будетъ $AI=HI+HE=EI=VI$, по сему изъ точки I , взятой за центръ, полупересѣнникомъ EI описанной кругъ ABE касается даннаго круга въ точкѣ E (Частъ II. § 89). Теперь изъ центровъ I и H опустимъ на проведенныя хорды AE и EB перпендикуляры IN и HO , HL и HM , то опъ сего произойдутъ треугольники EHL и EIN , также EHM и EIO подобны между собою, и для того будетъ $EH:EI=EL:EN=EM:EO$ или $2EL:2EN=2EM:2EO$, то есть $EC:AE=ED:EB$; по сей причинѣ и въ разсужденіи общаго угла AEB треугольники ECD и AEB будутъ подобны (Частъ II. § 105), и уголъ $ECD=EAEB$, слѣдовательно линія CD параллельна AB (Частъ II. § 49 слѣд. I).

Увѣдомленіе. Благосклонный читатель! дабы не увеличить число моихъ листовъ, и не лишить васъ того удовольствія, которое вы при разрѣшеніи предлагаемыхъ задачъ собою приобретѣть можете, то я описавъ нѣкоторые предварительныя отношенія, служащія къ опроверженію неправильно задаваемыхъ вопросовъ, сообщаю вамъ для собственнаго вашего изслѣдованія требуемаго нѣсколько такихъ предложеній, коихъ рѣшенія мнѣ извѣстны.

Примѣчанія.

I. Если дано будетъ по извѣстнымъ бокамъ AB и AD найти площадь параллелограмма $ABCD$ (Фиг. 31), въ которомъ ни положеніе линій AB и AD подъ числомъ градусовъ, ни діагональ AC не извѣстны; то сей вопросъ

просьба будетъ не возможной : ибо описавъ изъ точекъ А и В полуоперешниками AD и BC дуги GH и EF, и проведя въ произвольныя точки G и H линіи AH и AG, пропяти изъ точекъ G и H параллельно основанію линіи HF и GE, и соедини точки E и F съ точкою В прямыми линіями, то опъ сего не перемѣня данной величины боковъ параллелограма ABCD произойдетъ безконечное множество неравныхъ между собою параллелограмовъ AHFB и AGEV, такъ что самой большой изъ нихъ будетъ тотъ, у котораго бокъ AG есть перпендикуляръ; слѣдовательно сей вопросъ не можетъ быть принятъ къ разрѣшенію.

II. Равнымъ образомъ не можно будетъ рѣшить и слѣдующаго вопроса : ежели дана будетъ только величина однихъ боковъ AB, BD, DC и AC чепверосторонника ABCD (фиг. 32), не упоминая о прочихъ частяхъ онаго ; ибо описавъ изъ точки А полуоперешникомъ AC дугу EF, проведи въ произвольныя точки E и F линіи AE и AF ; потомъ изъ точекъ E и F разворотемъ линіи CD опиши дуги, а изъ точки В полуоперешникомъ BD дугу GH, пересѣкающую первыя въ точкахъ H и G ; потомъ проведи FH и EG, также BH и BG, то опъ сего произойдетъ безконечное число различной величины чепвероугольниковъ, имѣющихъ бока равные даннымъ ; изъ чего видно, что искомая величина плоскости есть безконечно перемѣняющаяся, и потому задача не возможна.

III Безразсудно бы было требовать, дабы по известной плоскости и суммѣ боковъ треугольника ABC (фиг. 33) найши каждой бокъ порознь ; ибо въ семъ случаѣ можно представивъ безконечное множество другихъ треугольниковъ, изъ коихъ каждой бокъ при всякой перемѣнѣ будетъ имѣть различную и непостоянную величину, такъ что сумма ихъ всегда будетъ равна суммѣ боковъ Δ ABC. Для объясненія сего опустивъ перпендикуляръ CG, сдѣлай произвольную высоту GD ; потомъ сыскавъ къ высотѣ GD къ CG и къ основанію AB чепверную пропорціональную AF, проведи DE параллельно AB, между коими, при меньшей высотѣ GD, можно будетъ провести двѣ линіи AE и EF, коихъ бы сумма была равна $AC+BC+BF$; также при большой высотѣ можно провести двѣ линіи AE и EF, коихъ бы сумма была равна $AC+BC+BF$, и такъ поступая далѣе, произойши можетъ безконечное число треугольниковъ, имѣющихъ непостоянную величину своихъ боковъ, коихъ общая сумма $AF+AE+EF$ всегда будетъ равна $AB+BC+AC$, и плоскость cadaго будетъ равна плоско-

сти

сти данного треугольника ABC ; ибо $GD : CG = AB : AF$, гдѣ $GD \times AF = CG \times AB$, по сему и $\frac{1}{2}(GD \times AF) = \frac{1}{2}(CG \times AB)$, то есть $\triangle ADF = \triangle ABC$; слѣдовательно сей вопросъ не подверженъ рѣшенію, а потому и невозможной.

И такъ при всякой предлагаемой какой бы то ни было Геометрической задачѣ надлежитъ приступающему къ рѣшенію оной прежде разсмотрѣть связь извѣстныхъ частей данной фигуры; разсуждая припомъ, не подвержены ли неизвѣстныя или искомыя части какой либо перемѣнѣ, и еслили найдется, что можно будетъ оную изобразить съ различною перемѣною требуемыхъ только величинъ къ другому видѣ, то такой вопросъ будетъ непостоянной, и слѣдовательно не возможной. Симъ-то самымъ способомъ познаются возможныя и невозможныя Геометрическія задачи.



О задачахъ, требующихъ рѣшенія.

I. Извѣстны бока AB и BC прямоугольника $ABCD$, найми бокъ BE вписаннаго ромба $BEDF$ *фиг. 34*.

II. Въ треугольникѣ ABC извѣстна высота BD , основаніе AC и произведеніе двухъ боковъ AB и BC , найми оныя *фиг. 35*.

III. Въ прямоугольномъ равнобедренномъ треугольникѣ ABC разности CD діогонали AC и бока AB извѣстна, найми прочее *фиг. 36*.

IV. Сумма боковъ $AB + BC + AC$ прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника ABC извѣстна, найми каждой бокъ порознь *фиг. 37*.

V. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC діогональ AC и полуперпендикулъ EF вписаннаго круга извѣстны, найми бокъ AB и BC *фиг. 38*.

VI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ APC , основаніе AB , и другой бокъ BC съ разностію CD , то есть $BC + DC$ извѣстны, найми діогональ AC *фиг. 39*.

VII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ $AB+BC$ и разность перпендикуляровъ $AB-AC=DB$ извѣстны, найди прочее *фиг. 40.*

VIII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC разность BD основанія AB и высоты AC и разность BE дѣгонали BC и бока AC извѣстны, найди прочее *фиг. 41.*

IX. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ $AB+BC+AC$ и разность BD двухъ боковъ, составляющихъ прямой уголъ, извѣстны, найди каждой боку порознь *фиг. 40.*

X. Въ прямоугольникѣ ABCD вписать другой EFGH, которой бы равенъ былъ половинѣ, третей, четвертой части или $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ и проч. даннаго, такъ чтобы бока онаго были въ равномъ разстоянїи отъ боковъ даннаго; а потомъ по извѣстнымъ бокамъ AB и CB найди разстоянїе DI *фиг. 42.*

XI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC перпендикуляръ BD , опущенной на дѣгонали AC , извѣстенъ, и припомъ отрезокъ $DC=$ боку AB , найди каждой боку порознь (*Черт. V. фиг. 43.*).

XII. Площадь правильнаго восьмиугольника A извѣстна, найди боку BC *Фиг. 44.*

XIII. Въ треугольникѣ ABC проведены чрезъ произвольно взятую точку G изъ угловъ A , B и C линїи AE , BF и CD , въ которомъ части боковъ AD , DB , AF и CE извѣстны, найди прочїя неизвѣстныя части *фиг. 45.*

XIV. Въ треугольникѣ ABC основанїе AC , высота BE и разность DC боковъ AC и BC извѣстны, найди боку AB *фиг. 46.*

XV. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC разность BD боковъ AB и AC , и сумма $AB+BC$ дѣгонали съ бокомъ извѣстны, найди прочее *Черт. IV. фиг. 40.*

XVI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ $AB+BC+AC$ и разность CD между дѣ-

дѣгоналию AC и основаніемъ AB извѣстимъ, найти прочее *фиг. 39.*

XVII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстенъ перпендикуляръ BD , опущенной изъ прямого угла B на дѣгонали AC , и содержаніе боковъ AB и BC дано, найти прочее *Чертеж. V. Фиг. 47.*

XVIII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстна величина перпендикуляра BD и содержаніе дѣгонали AC къ боку AB , найти прочее *фиг. 47.*

XIX. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстна величина бока AB и содержаніе отрѣзковъ $AD:DC = n:m$, найти прочее *фиг. 47.*

XX. Въ полкругѣ $AEDF$ извѣстна часть AB діаметра AD , найти бокъ BC вписаннаго квадрата $BCFE$ *фиг. 48.*

XXI. Въ полукругѣ $ACDB$ хорды AC , CD и DB порознь извѣстны, найти поперешникъ AB *фиг. 49.*

XXII. Извѣстна величина бока AB правильнаго пятинапцатиугольника, найти полупоперешникъ AC , и обратно по извѣстному полупоперешнику AC найти бокъ AB *фиг. 50.*

XXIII. Бока AB , BC , CD и DA четверосторонника $ABCD$ вписаннаго въ кругъ, найти отрѣзки AE , BE , CE и DE дѣгоналей AC и BD *фиг. 51.*

XXIV. Въ прямоугольной треугольникѣ ABC извѣстна площадь онаго и разность DC дѣгонали AC и основанія AB , найти бока онаго *Чертеж. IV. Фиг. 39.*

XXV. Въ четвероугольникѣ $ABCD$ извѣстны бока AB , BC , CD , AD , сумма дѣгоналей $AC+BD$ и линія EF , проведенная въ половины дѣгоналей, найти каждую дѣгоналию AC и BD *фиг. 52.*

XXVI. Въ полукругѣ части AC , CB поперешника AB , хорда DE порознь, и сумма боковъ $CD+CE$ извѣстны, найти каждой бокъ CD и CE *фиг. 53.*

XXVII. Поперешникъ AB и наружныя части CD и CE боковъ AC и BC неравностороннаго треугольника ABC извѣстны, найти части AD и BE *фиг. 54.*

XXVIII. Величина полуперешника АВ, и синусъ прямой ВС съ синусомъ обращеннымъ CD, то есть $BC + CD$ извѣстны, найти каждой порознь *фиг. 55.*

XXIX. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, полуперешникъ GH круга и бокъ ED вписаннаго квадрата извѣстны, найти каждой бокъ треугольника ABC порознь (*фиг. 56*). Рѣшеніе Тригонометрическое.

XXX. Въ остроугольномъ треугольникѣ ABC, части основанія AD, ЕС и углы ABD и EBC извѣстны, найти прочія части даннаго треугольника ABC *фиг. 57.*

КОНЕЦЪ ЧЕТВЕРТОЙ И ПОСЛѢДНЕЙ ЧАСТИ
КУРСА ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ.



З а к л ю ч е н і е.

Благосклонный читатель! хотя я предисловіемъ первой части и обѣщалъ сообщить почтенной Публикѣ ясную часть моего курса о свойствахъ кривыхъ линій и о искусствѣ мѣнанія бомбъ; но поелику слабые труды мои, яко частнаго Учишеля, не взирая на приписуемыя имъ отъ нѣкоторымъ любителей наукъ похвалы (какъ-то изъ напечатаннаго въ моей Фортификаціи одобренія видно), будучи весьма мало въ учрежденныя училища къ наставленію юношества допускаемы, не возвратили мнѣ еще и того пріобрѣтеннаго ученіемъ моимъ спяжанія, которое употреблено на писаніе сочиненныхъ мною пяти книгъ: по безпредѣльное мое къ подобнымъ упражненіямъ для пользы общества спремленіе, вкупѣ съ надеждою, питавшею меня къ полученію должнаго воздаянія, исчезло; по сей-то причинѣ принужденнымъ я себя нашелъ слабые подвиги мои нынѣ оставить, дабы подкрѣпя удрученныя силы и удержавъ остатки слабаго знанія моего залогомъ собственности, не возвращаться къ первымъ духа моего рвеніямъ, доколѣ смертность, облекающая оной, не разстроитъ свои органическія движенія.

Имена Особъ, благоволившихъ подписать-
ся для полученія Алгебры.

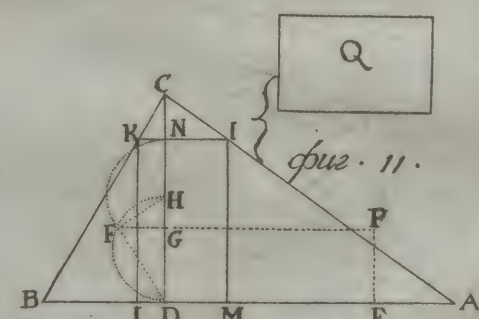
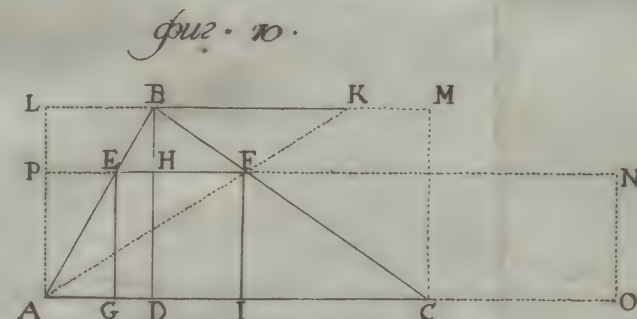
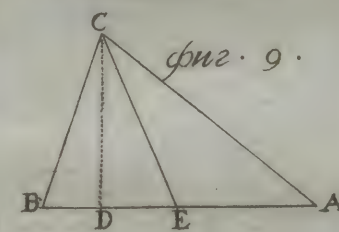
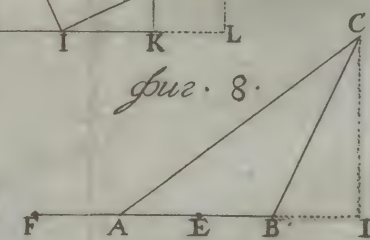
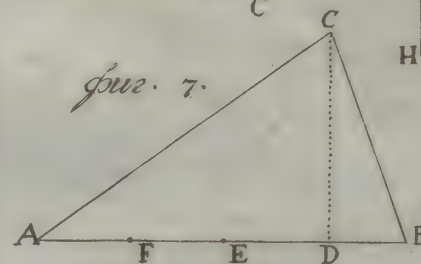
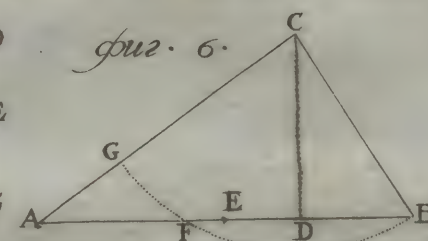
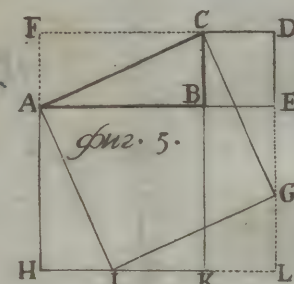
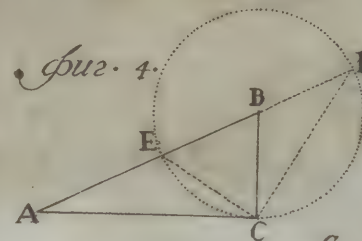
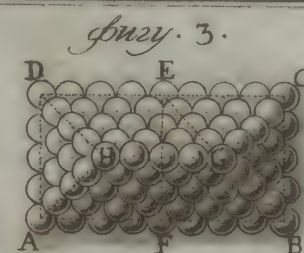
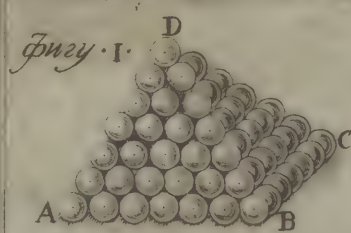
	число книгъ.
Его Высокопревосходительство Г. Генералъ Ан- шефъ и разныхъ Орденовъ Кавалеръ Петръ Во- гдановичъ Пассекъ	1.
Его Сіятельство Г. Генералъ Порупчикъ и раз- ныхъ Орденовъ Кавалеръ Князь Сергій Ѳедоровичъ Голицынъ	1.
Его Превосходительство Г. Инженеръ Генералъ Маіоръ Иванъ Андреевичъ Вельяшевъ-Волынцовъ	1.
Его Превосходительство Артиллеріи Г. Гене- ралъ Маіоръ Иванъ Ѳедоровичъ Фонъ-Мершенсъ	1.
Его Превосходительство Г. Генералъ Маіоръ и Кавалеръ Николай Даниловичъ Языковъ	1.
Его Высокородіе Г. Брегадиръ и Кавалеръ Гаври- ла Михайловичъ Барковъ	1.
Его Высокородіе Г. Статской Совѣтникъ Але- ксандръ Андреевичъ Щербининъ	1.
Его Сіятельство Г. Камеръ-Юнкеръ Графъ Ни- кипа Петровичъ Панинъ	10.
Его Высокородіе Г. Камеръ-Юнкеръ и Кавалеръ Петръ Петровичъ Нарышкинъ	5.
Его Сіятельство Г. Полковникъ Графъ Иванъ Ивановичъ Гендриковъ	2.
Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Яковъ Федо- ровичъ Апрѣлевъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Михайла Васильвичъ Аргамаковъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Алексѣй Фе- доровичъ Ладыженской	1.
Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Александръ Павловичъ Галаховъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Коллежской Совѣтникъ Петръ Никифоровичъ Чернышъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Подполковникъ Сергей Михайловичъ Каменской	1.

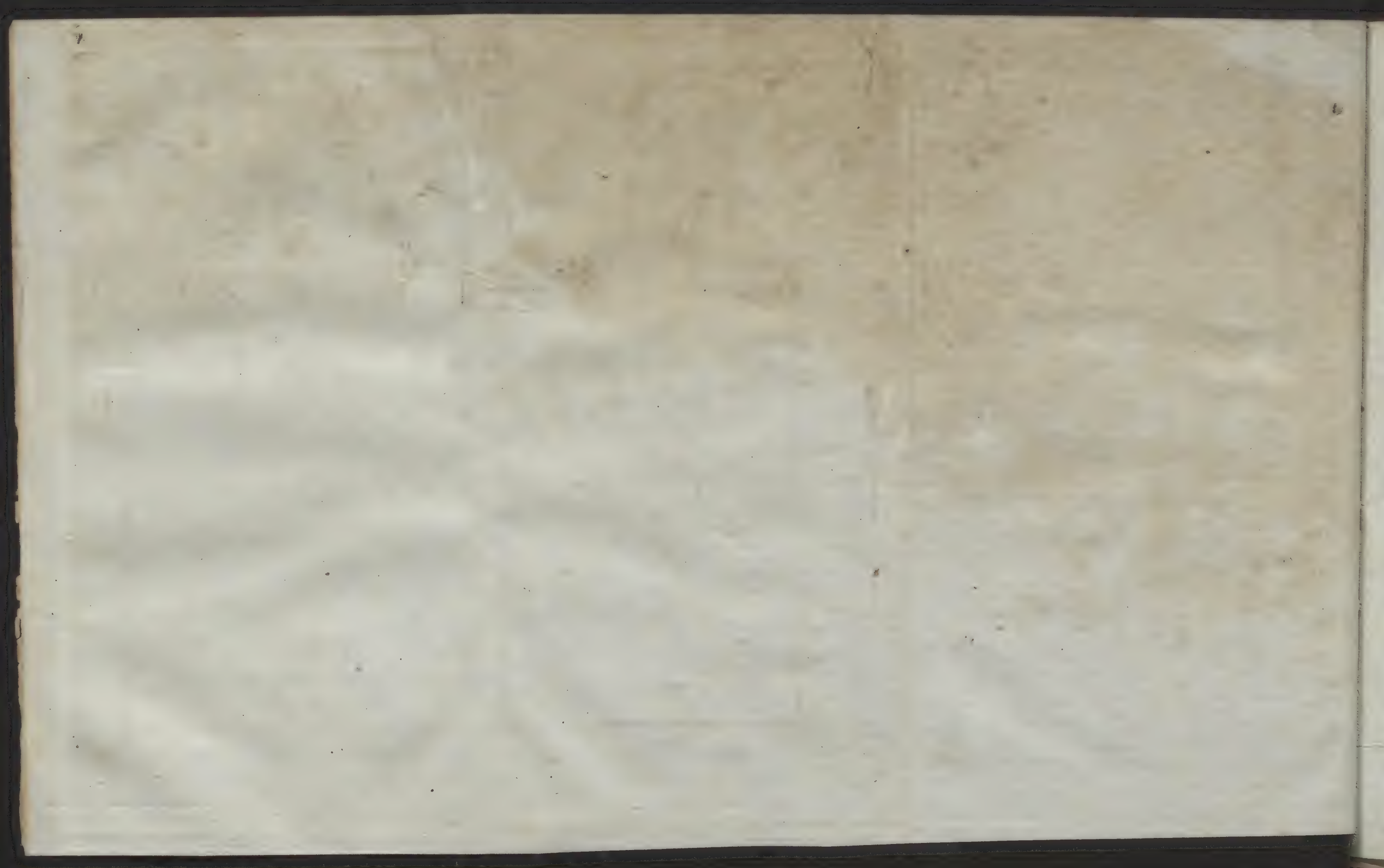
Его

Его Сіятельство Г. Подполковникъ Графъ	
Петръ Александровичъ Толстой	1.
Его Высокоблагородіе Г. Подполковникъ Иванъ	
Васильевичъ Бибиловъ	2.
Его Высокоблагородіе Артиллеріи Г. Маіоръ Ми-	
хайла Аванасъевичъ Никифоровъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Надворный Совѣтникъ	
Василей Андреевичъ Дашковъ	1.
Его Высокоблагородіе Гвардіи Г. Капитанъ Ни-	
колай Пепровичъ Макаровъ	1.
Его Высокоблагородіе Артиллеріи Г. Капитанъ	
Иванъ Яковлевичъ Блудовъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Преміеръ-Маіоръ Ге-	
расимъ Никипичъ Савинъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Коллежской Ассесоръ	
Матвей Васильевичъ Бибиловъ	3.
Его Высокоблагородіе Г. Губернской Землемѣръ	
Иванъ Емельяновичъ Измайловъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Секундъ-Маіоръ Василей	
Ильичъ Межериновъ	1.
Его Высокоблагородіе Г. Секундъ-Маіоръ Алексѣй	
Яковлевичъ Бологовской	1.
Его Благородіе конной Гвардіи Г. Подпоручикъ	
Павелъ Пепровичъ Свинъинъ	1.
Его Благородіе Артиллеріи Г. Поручикъ Ни-	
колай Николаевичъ Дурасовъ	1.
Его Благородіе Артиллеріи Г. Поручикъ Але-	
ксандръ Авксентъевичъ Дурновъ	1.
Его Благородіе Гвардіи Подпоручикъ Матвей	
Федоровичъ Толстой	10.
Его Благородіе Г. Титулярной Совѣтникъ Але-	
ксѣй Лукичъ Лукинъ	1.
Его Свѣтлости Г. Генералъ-Фельдмаршала и	
многихъ Орденовъ Кавалера Князь Григорья Але-	
ксандровича Попемкина, Г. Флигель-Адъютантъ	
Николай Никипичъ Демидовъ	1.
Его Благородіе Гвардіи Г. Прапорщикъ Сергей	
Васильевичъ Толстой	1.

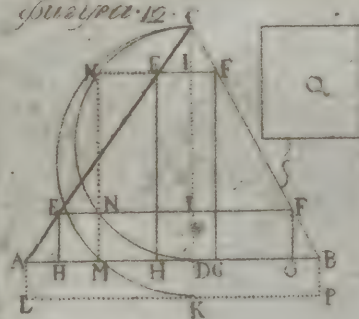
Его

- Его Благородіе Арпиллеріи Г. Подпоручикѣ
 Алексѣй Ивановичъ Фонъ-Мершенъ - 1.
 — Арпиллеріи Г. Подпоручикѣ Александрѣ Ива-
 новичѣ Рукинѣ - 1.
 — Арпиллеріи Г. Подпоручикѣ Федорѣ Ивано-
 вичѣ Хомуловѣ - 1.
 — Г. Землемѣрѣ Иванѣ Аванасѣвичѣ Гавреневѣ 1.
 — Г. Землемѣрѣ Николай Григорѣвичѣ Ивановѣ
 съ Фортификаціею - 1.
 — Г. Землемѣрѣ Пептрѣ Моисеевичѣ Жулинѣ съ
 Фортификаціею - 1.
 — Г. Землемѣрѣ Яковѣ Аванасѣвичѣ Папковѣ 1.
 — Г. Землемѣрѣ Сергей Пепровичѣ Спасеновѣ 1.
 — Г. Землемѣрѣ Николай Михайловичѣ Вознесен-
 ской - 1.
 — Г. Поручикѣ Николай Ивановичѣ Цемировѣ 1.
 — Арпиллеріи Г. Штыкѣ-Юнкерѣ Иванѣ Ивано-
 вичѣ Сергеевѣ - 1.
 — Неизвѣстная Особа - 1.
 — Г. Сержантѣ Никиша Васильевичѣ Демидовѣ 1.
 — Г. Сержантѣ Павелѣ Николаевичѣ Скрипи-
 цинѣ - 2.
 — Г. Сержантѣ Федорѣ Александровичѣ Уваровѣ 1.
 Московскаго Императорскаго Университета Г.
 Студентѣ Тимовей Ивановичѣ Перелоговѣ - 9.
 — Г. Студентѣ Ефимѣ Пепровичѣ Зерновѣ - 1.
 — Г. Арпиллеріи Капшенармусѣ Федорѣ Федоро-
 вичѣ Кузминѣ - 1.
 — Г. Арпиллеріи Капшенармусѣ Иванѣ Андре-
 вичѣ Сухаревѣ. - 1.

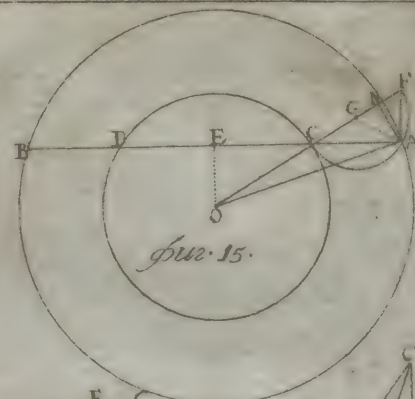
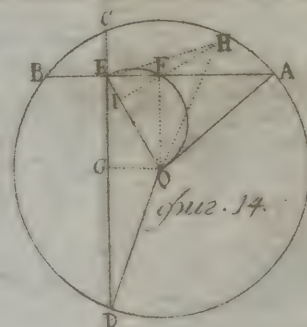
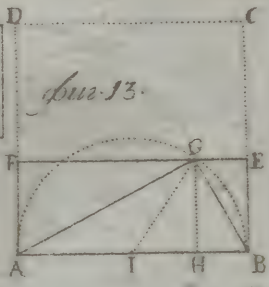




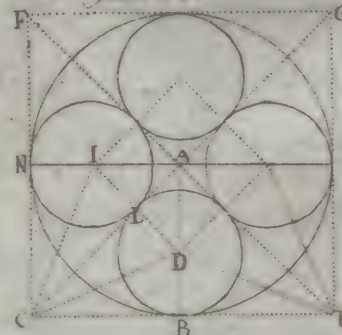
Фиг. 12.



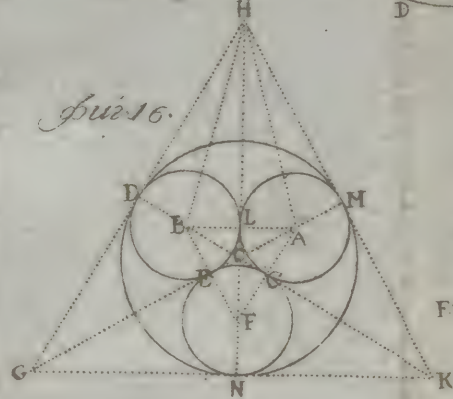
Фиг. 13.



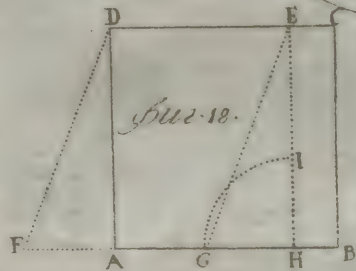
Фиг. 17.



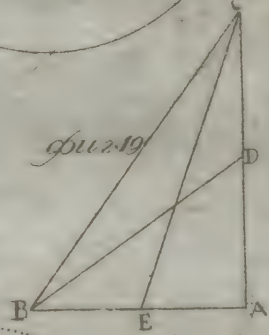
Фиг. 16.



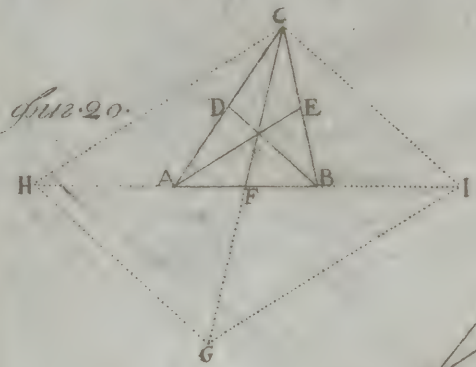
Фиг. 18.



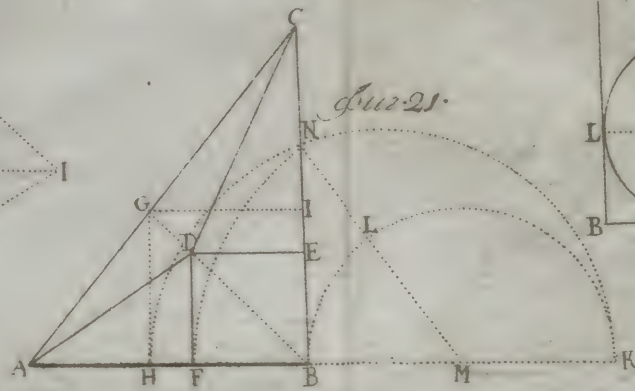
Фиг. 19.



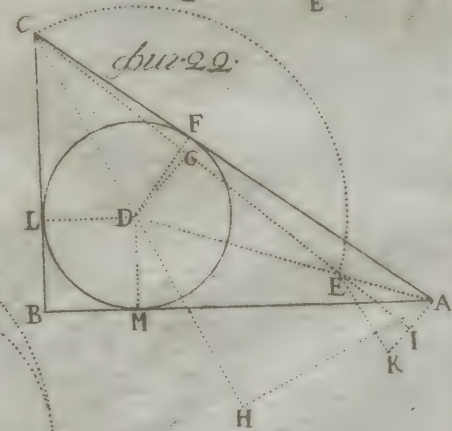
Фиг. 20.

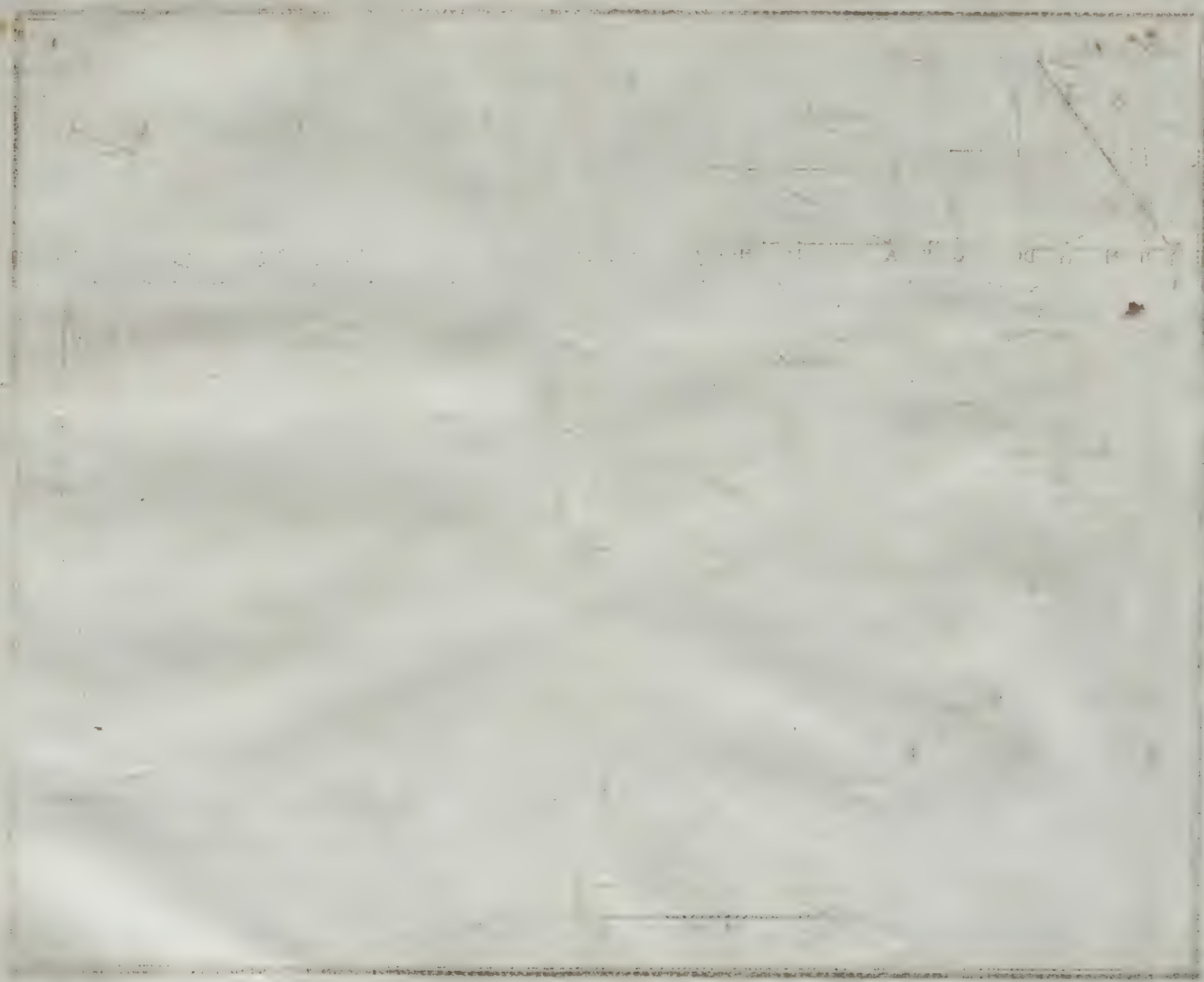


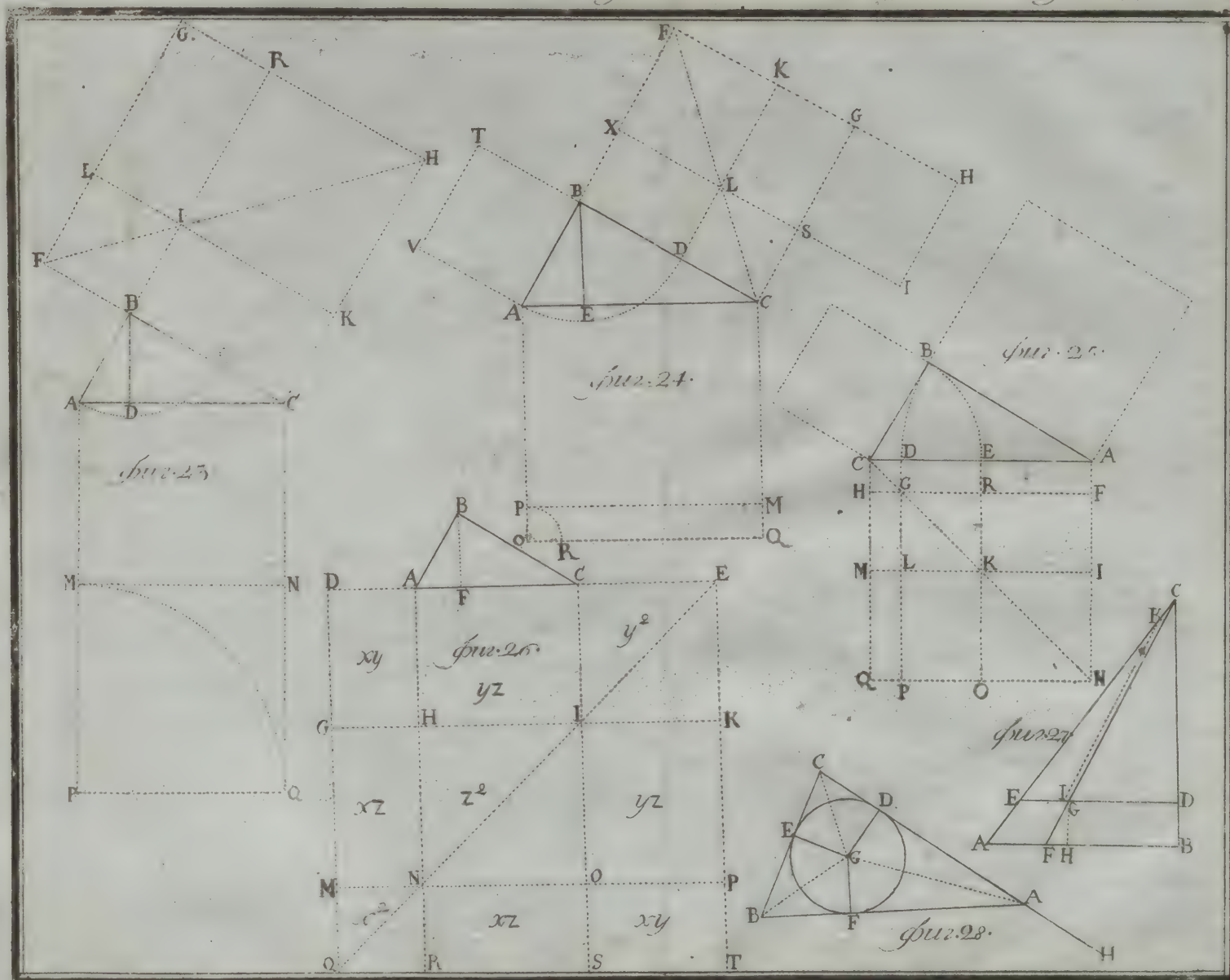
Фиг. 21.

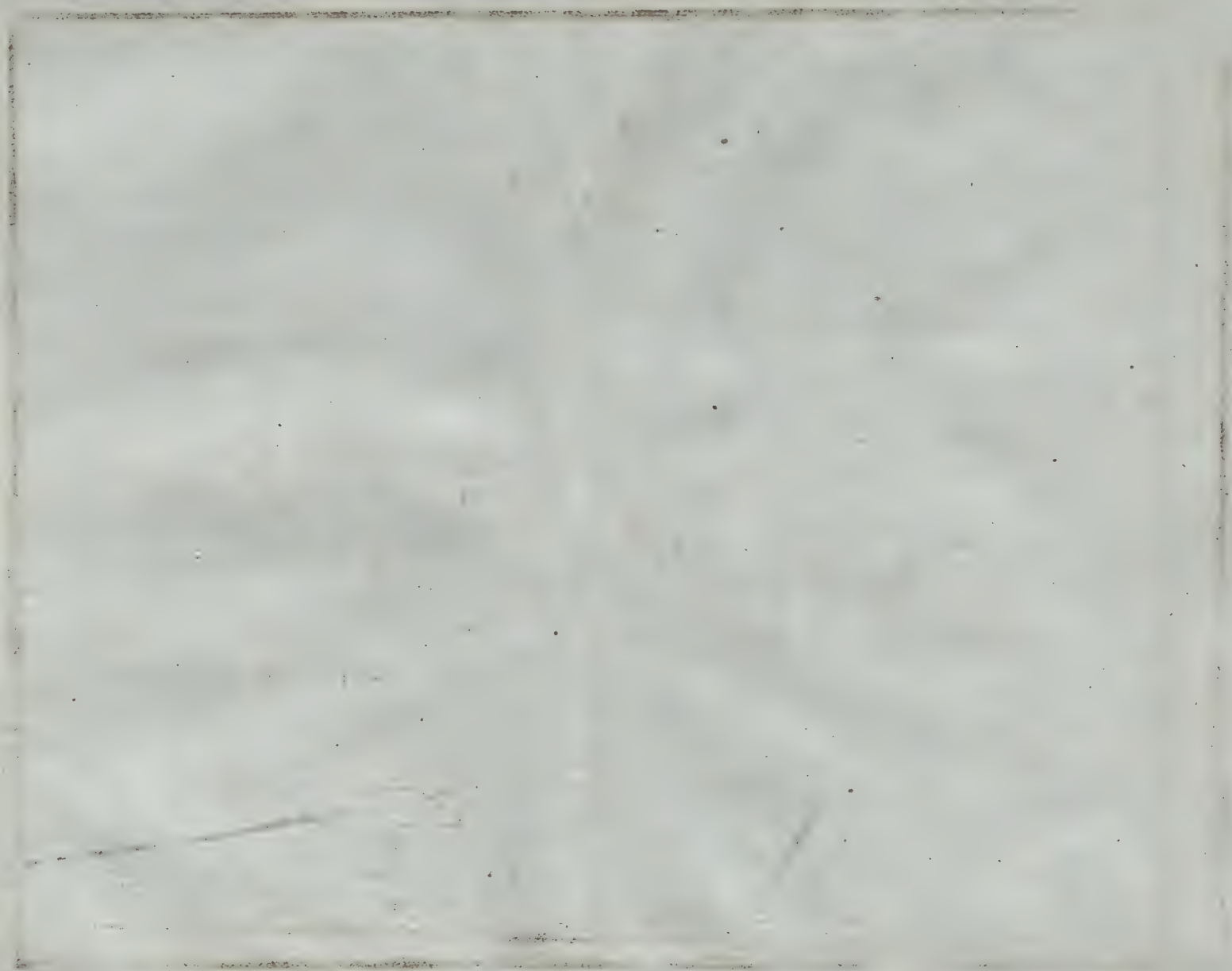


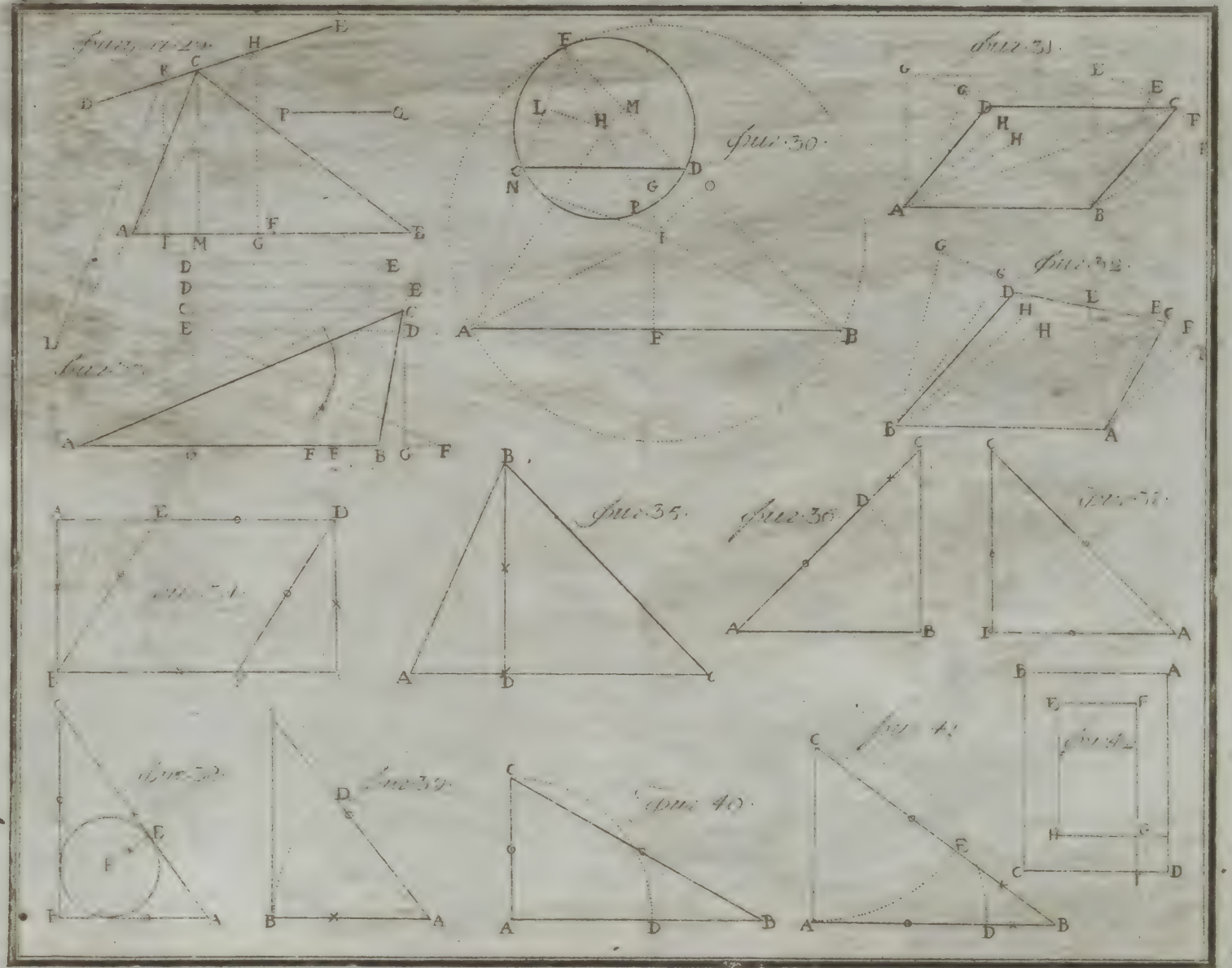
Фиг. 22.

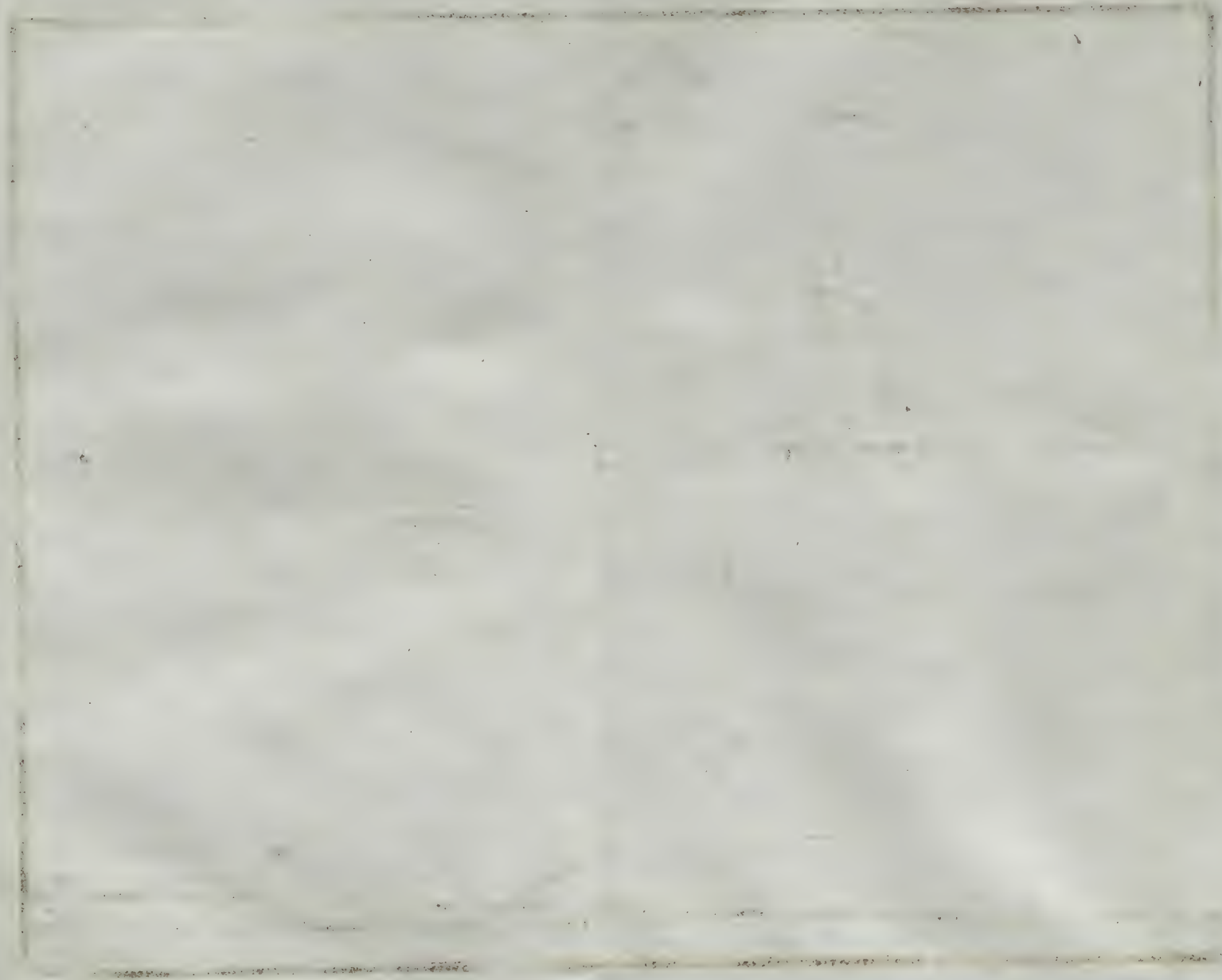


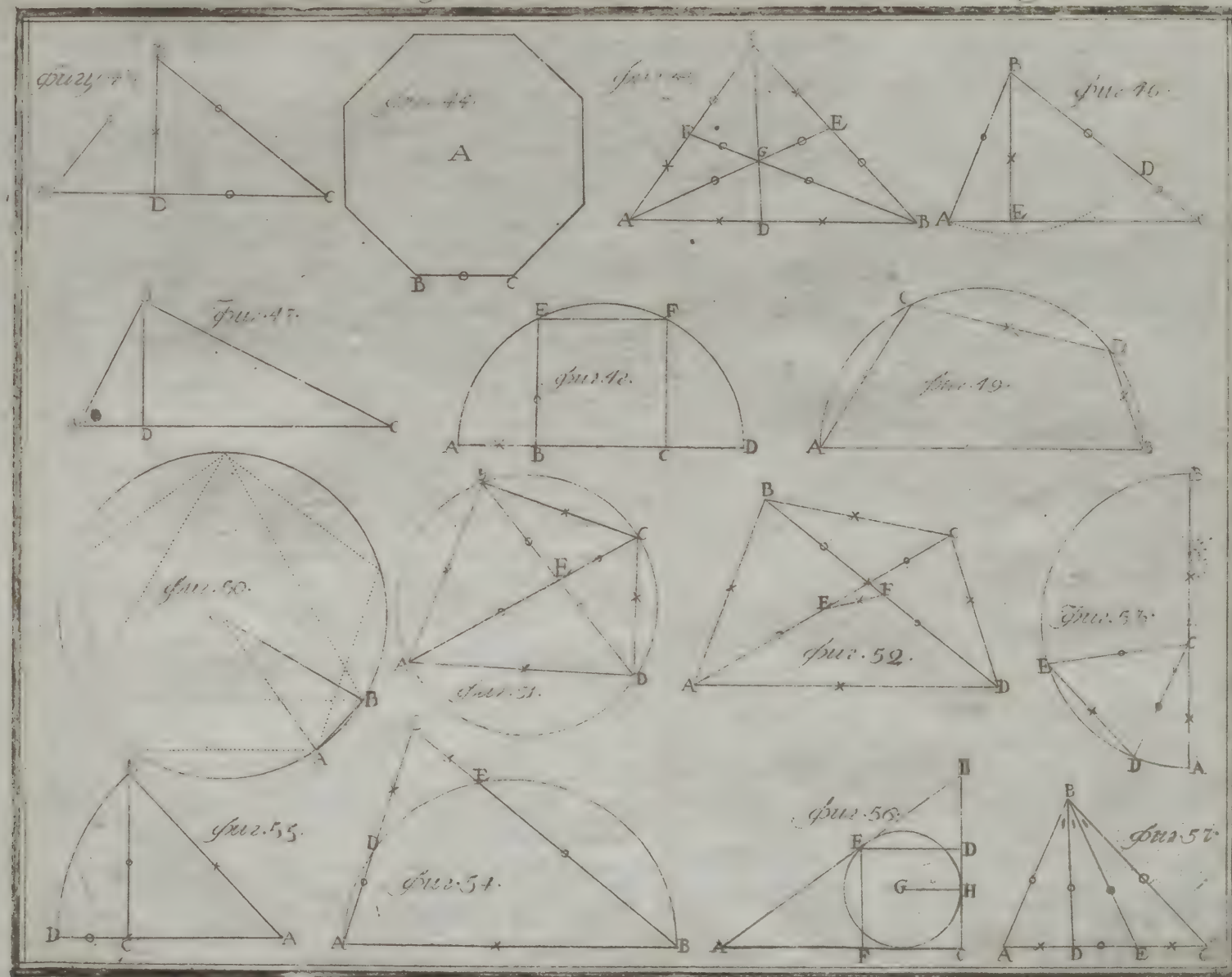


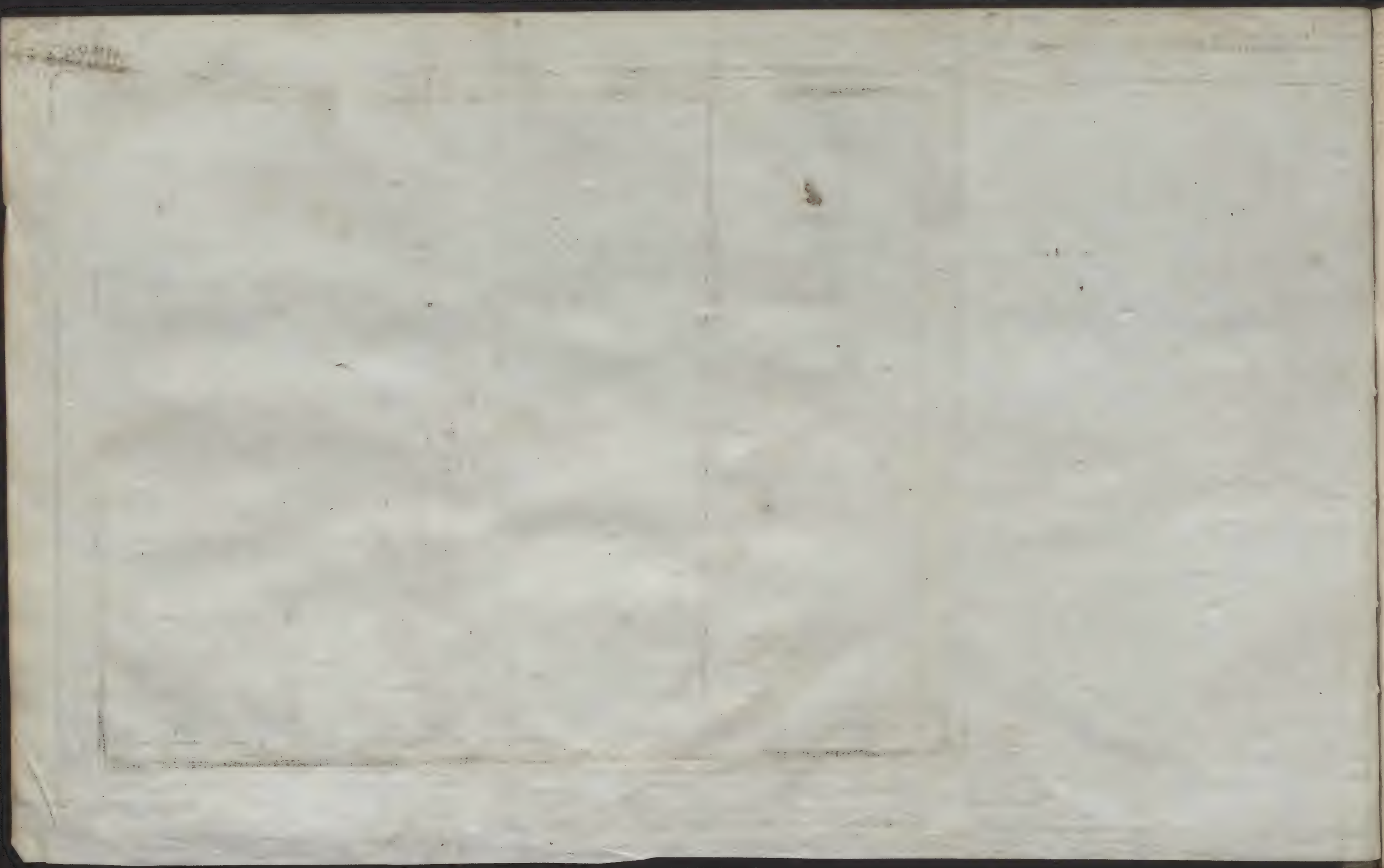












Uncl. 2796

Inches 1 2 3 4 5 6 7 8
Centimetres 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Colour Chart #13

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



DANES
PICTA
2004

